



Etude analytique et numérique du développement d'instabilités MHD dans des structures d'accrétion-éjection magnétisées

Evy Kersalé

► To cite this version:

Evy Kersalé. Etude analytique et numérique du développement d'instabilités MHD dans des structures d'accrétion-éjection magnétisées. Phénomènes cosmiques de haute energie [astro-ph.HE]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT : . tel-00724447

HAL Id: tel-00724447

<https://theses.hal.science/tel-00724447>

Submitted on 21 Aug 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE
PRÉSENTÉE PAR

Evvy Kersalé

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

SPÉCIALITÉ ASTROPHYSIQUE

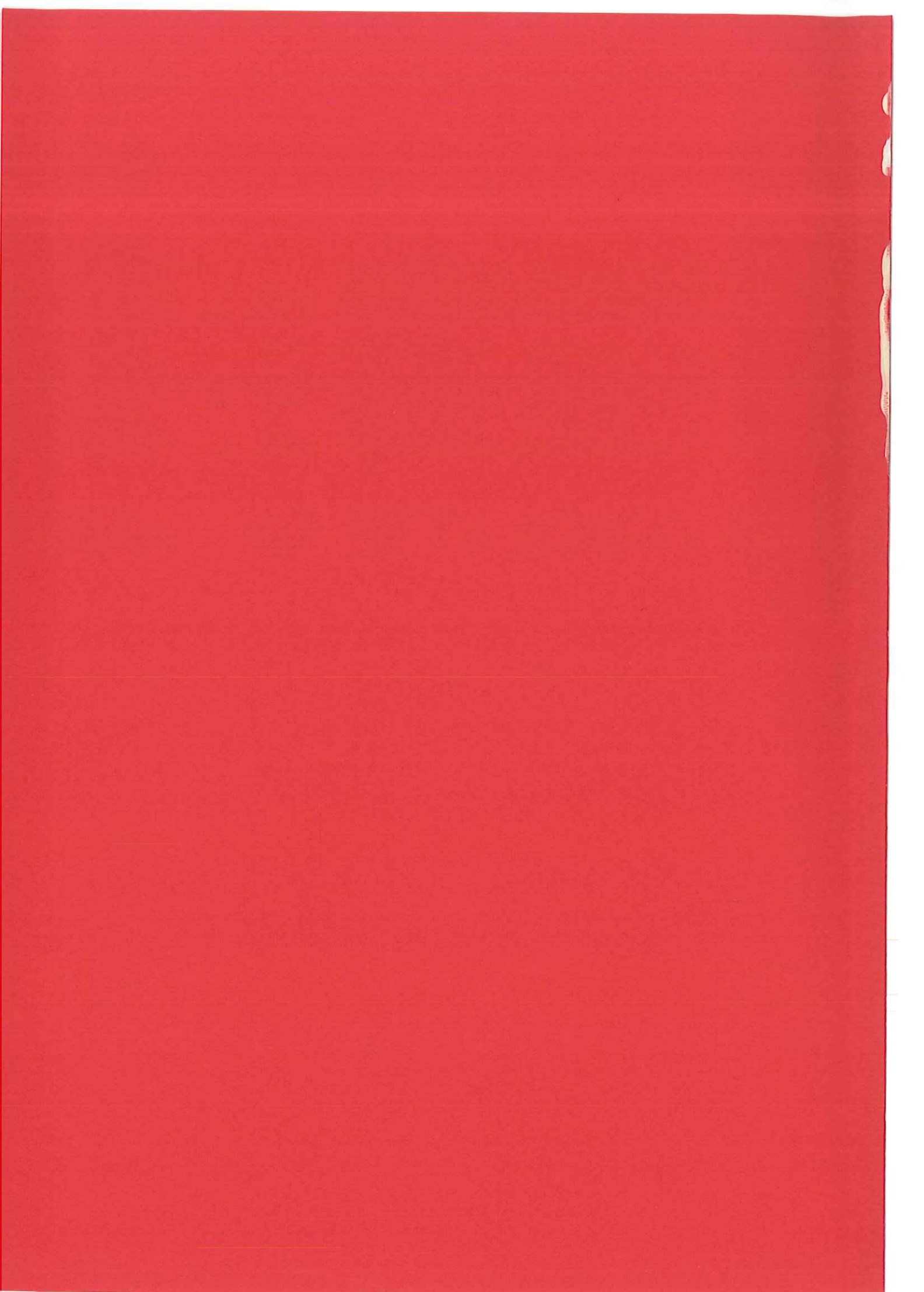
ÉTUDE ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU
DÉVELOPPEMENT D'INSTABILITÉS MHD DANS DES
STRUCTURES D'ACCRÉTION-ÉJECTION MAGNÉTISÉES

DATE DE SOUTENANCE : 23 juin 2000

COMPOSITION DU JURY :

M. Alain ROUX	Président
M. Michel TAGGER	Rapporteur
M. Tahar AMARI	Rapporteur
M. Gérard CHANTEUR	Examineur
M. Guy PELLETIER	Directeur de thèse
M. Pierre-Yves LONGARETTI	Directeur de thèse

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE.
Observatoire de Grenoble, UJF/CNRS, BP 53, F-38041 Grenoble cedex 9



THÈSE
PRÉSENTÉE PAR

Evy Kersalé

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

SPÉCIALITÉ ASTROPHYSIQUE

ÉTUDE ANALYTIQUE ET NUMÉRIQUE DU
DÉVELOPPEMENT D'INSTABILITÉS MHD DANS DES
STRUCTURES D'ACCRÉTION-ÉJECTION MAGNÉTISÉES

DATE DE SOUTENANCE : 23 juin 2000

COMPOSITION DU JURY :

M. Alain ROUX	Président
M. Michel TAGGER	Rapporteur
M. Tahar AMARI	Rapporteur
M. Gérard CHANTEUR	Examineur
M. Guy PELLETIER	Directeur de thèse
M. Pierre-Yves LONGARETTI	Directeur de thèse

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE,
Observatoire de Grenoble, UJF/CNRS, BP 53, F-38 041 Grenoble cedex 9

Rédiger le petit mot qui, suivant la tradition, ouvre ce rapport de thèse me permet de réaliser que ces années fortes en émotions sont maintenant terminées. Rarement une thèse se trouve être bien docile mais dans le cas présent, à la fois à travers les aspects numériques et les aspects purement analytiques, cette thèse s'est montrée très capricieuse!

De nombreuses personnes m'ont cependant permis d'apprivoiser ce sujet et de mener à bien ce travail ; je tiens à les en remercier.

Je suis avant tout reconnaissant envers les membres du jury de m'avoir attribué le titre de Docteur et je remercie en particulier Alain Roux d'y avoir présidé.

Michel Tagger et Tahar Amari ont tous deux accepté de rédiger, en un temps très court, un rapport détaillé sur une version incomplète mais néanmoins volumineuse de ce document ; je leur en suis infiniment gré.

Je remercie également Gérard Chanteur d'avoir participé à mon jury de thèse et de m'avoir plongé dans le bain bouillonnant de la simulation numérique.

Durant ces dernières années, j'ai beaucoup appris, à de nombreux points de vue, en travaillant aux côtés de mes directeurs de thèse. Je leur en suis extrêmement reconnaissant. Je remercie Guy Pelletier pour le plaisir qu'il montre et qu'il transmet dans la pratique de la Science, pour sa bonne humeur et son naturel très rassurant.

Avec Pierre-Yves Longaretti, nous avons partagé au jour le jour les aléas de cette thèse ; heureusement le cœur a tenu bon ! Je lui suis sincèrement reconnaissant pour toutes les discussions que nous avons eues.

J'ai effectué cette thèse au Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble. Je remercie ses directeurs, Claude Bertout puis Christian Perrier-Bellet, qui m'ont tous deux permis de travailler dans ce cadre privilégié.

Merci à vous Fanfan, Sylvie F., Hélène H. et Stéphanie de S.J., c'est toujours un plaisir de venir vous voir.

La nature de mon sujet de thèse m'a régulièrement amené à recourir aux soins de Françoise R. et de Ginette B., non pas infirmières mais responsables du site informatique... Encore merci pour tout (y compris pour les gâteaux!).

J'ai beaucoup apprécié les qualités humaines (mais oui, les qualités scientifiques aussi!) de tous mes collègues du LAOG ; merci à vous tous ! Je garde entre autres de très bons souvenirs des réunions en montagne avec la folle équipe des joyeux SHERPAS : Guy, Pyl, Gilles, John, Didier, Alex.

Il n'y a pas à dire, faire une thèse c'est quand même plus sympa lorsqu'il y a de l'ambiance... Et ça, il y en a eu ! J'ai beaucoup ri de ce goinfre de Pop avec ce saltimbanque de Fred, avec Stephan le germanique lymphatique et Gepy « el fecondatore ». Heureusement, la gent féminine relevait le niveau des conversations ; très chères Claudia et Stéphanie merci de nous avoir supportés.

Je ne peux non plus oublier les revues de « Charly » et du « Monde diplo » avec Nico. Sebo

et sa musique de supermarché, l'hyperactivité de Manu et les grands ponts de Magic Alex ; merci pour tous ces bons moments.

Si j'ai ainsi pu mener mes études et cette thèse comme je l'ai souhaité, c'est certainement en grande partie grâce à mes parents. Dans mes entreprises, entre Marseille, Brest et Grenoble, avec une grande liberté, ils m'ont toujours assuré de leur soutien. Je leur dois beaucoup ; j'espère simplement qu'ils sont heureux du résultat.

Je dois également beaucoup à Frédérique pour m'avoir accompagné durant ces dernières années intenses. Je la remercie pour sa générosité et pour sa patience mais surtout de me montrer que le monde est plus vaste que celui du simple esprit cartésien...

Résumé

La première partie de ce travail se propose de définir une nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités MHD de pression dans les structures d'accrétion-éjection magnétisées. Ces processus se produisent dans des plasmas confinés magnétiquement et sont très contraignants dans le domaine de la fusion thermonucléaire mais leur influence est peu étudiée dans des contextes astrophysiques. Dans un cadre d'approximation éliminant les ondes magnéto-soniques rapides nous avons développé un système d'équations général permettant de s'intéresser à la fois aux modes instables d'interchange et aux modes de ballooning. L'application de ce système à un jet cylindrique en rotation solide nous montre que le cisaillement magnétique conduit à la déstabilisation des parties internes de ces structures. En outre, tout en clarifiant cette problématique dans une certaine mesure, nous retrouvons que ces flots sont génériquement instables vis-à-vis des modes d'interchange.

Par ailleurs, nous avons étudié les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles et plus particulièrement celles de la MHD. À partir d'un algorithme d'intégration élémentaire, nous avons pu évaluer les effets de géométrie, de conditions aux limites et de dissipation artificielle sur le calcul numérique, à travers une série de tests classiques.

L'étude de la production de rayons cosmiques de très haute énergie dans les gamma-ray bursts constitue la dernière partie du travail effectué. Dans ces objets, des processus de Fermi accélèrent des particules jusqu'à des énergies de 10^{21} eV, lors du croisement de perturbations d'Alfvén relativistes. Une interaction de type faisceau-plasma, entre une coquille de plasma en mouvement relativiste et les baryons qui la traversent, génère ces fronts alfvéniques et un mécanisme de rétrodiffusion redistribue l'énergie disponible entre des perturbations alfvéniques progressive, régressive et des perturbations magnéto-soniques.

Summary

The first part of this work proposes a new version of the mathematical formalism used to describe pressure-driven instabilities in magnetized accretion-ejection structures. Such processes, occurring in magnetically confined plasmas, pose very stringent limits to thermonuclear fusion devices but their influence in astrophysical objects has rarely been considered. In a framework which eliminates fast magnetosonic waves one develops a system of equations allowing us to follow both ballooning and interchange modes. An application of this result to a cylindrical jet being subject to solid rotation shows that the inner parts of such structures are destabilized by magnetic shear. Furthermore, while clarifying somewhat previous studies, one finds that jets confined by a dominant toroidal magnetic field are generically unstable with respect to interchange modes.

Moreover, one has written a numerical code to solve the MHD partial differential equations. Starting with a basic algorithm, one has assessed the effects of the geometry, boundary conditions and artificial dissipation on numerical computation. The code has been tested by solving classical hydrodynamic and MHD Riemann problems

A new mechanism of ultra high energy cosmic ray production in gamma-ray bursts composes the last part of this work. In these objects, particles are accelerated up to energies of the order of 10^{21} eV, by means of relativistic Alfvén perturbations crossings. A stream instability involving a highly relativistic shell of plasma, the fireball, and baryons going through it produces such Alfvén fronts. Then, Brillouin-like backscattering processes redistribute the available energy between the forward and backward Alfvén waves and the magnetosonic ones.

Table des matières

Introduction	1
I Mécanismes instables dans les structures d'accrétion-éjection magnétisées et génération de turbulence	5
1 Structures d'accrétion-éjection magnétiques	7
1.1 Éjections de matière	7
1.1.1 Jets dans les noyaux actifs de galaxie	8
1.1.2 Jets dans les étoiles jeunes	10
1.1.3 Modélisation de la dynamique de jets	11
1.1.4 Approche numérique de l'étude des jets	12
1.2 Disques d'accrétion	13
1.2.1 Accrétion dans les NAGs et les étoiles jeunes	13
1.2.2 Modèle standard	14
1.3 Symbiose de l'accrétion et de l'éjection	16
1.4 Simulations numériques d'accrétion et d'éjection	18
2 Introduction à la magnétohydrodynamique	21
2.1 Présentation générale	21
2.2 Cadre de la théorie MHD	22
2.2.1 Particules chargées en champ magnétique	23
2.2.2 Grandeurs caractéristiques de la MHD en astrophysique	24
2.2.3 Électro-neutralité d'un plasma	25
2.2.4 Description mono-fluide d'un plasma	25
2.3 Équations de la MHD	28
2.3.1 Origine cinétique	28
2.3.2 Équations de l'hydrodynamique	30
2.3.3 Loi d'Ohm généralisée	33
2.3.4 Équations de Maxwell	35
2.3.5 Équation d'induction	36
2.3.6 Force de Laplace	37

2.3.7	Bilan énergétique	38
2.4	MHD idéale	39
2.5	Système d'unités de Heaviside-Lorentz	40
3	Déstabilisation des structures d'accrétion-éjection	43
3.1	Turbulence dans les disques	43
3.1.1	Instabilité magnéto-rotationnelle	44
3.1.2	Instabilité de convection	45
3.2	Développement d'instabilités de jet	45
3.2.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz	46
3.2.2	Instabilités MHD	47
II	Instabilités MHD de pression	49
1	Présentation des instabilités	51
1.1	Instabilités en MHD idéales	51
1.2	Instabilités de pression	52
1.2.1	Critère d'instabilité	52
1.2.2	Interchange	53
1.2.3	Ballooning	54
1.2.4	Cisaillement magnétique	55
1.3	Mécanismes physiques de l'interchange	55
1.3.1	Sans champ magnétique	55
1.3.2	En champ magnétique	56
1.4	Intérêt astrophysique	57
2	MHD linéaire dans un plasma homogène	59
2.1	Une formulation linéarisée de la MHD	60
2.2	Introduction du vecteur déplacement	62
2.3	Ondes MHD en milieu homogène	63
2.3.1	Ondes d'Alfvén	64
2.3.2	Ondes magnéto-soniques	65
3	Ordering naturel du ballooning	67
3.1	Ondes potentiellement instables	67
3.2	Propriétés découlant de l'ordering ballooning	69
3.3	Développement WKB partiel	71
3.4	Ondes MHD en milieu hétérogène	71
3.5	Perturbations incompressibles	72

4	Équation de dispersion des modes ballooning	75
4.1	Cadre général du développement	75
4.2	Évaluation de la divergence du déplacement	76
4.3	Calcul de la perturbation magnétique	77
4.3.1	Composante parallèle	77
4.3.2	Composante perpendiculaire	78
4.4	Calcul des forces MHD	78
4.4.1	Pression thermique	78
4.4.2	Force de Lorentz parallèle	78
4.4.3	Tension magnétique perpendiculaire	78
4.5	Équation du mouvement perpendiculaire	80
4.6	Équation du mouvement parallèle	80
4.7	Propriétés des équations de dispersion	81
5	Cas d'un équilibre MHD pur	83
5.1	Échelles caractéristiques	84
5.2	Récriture des équations du mouvement	84
5.2.1	Identité remarquable	84
5.2.2	Terme de couplage parallèle	85
5.2.3	Équation du mouvement parallèle	86
5.2.4	Équation du mouvement alfvénique	86
5.3	Cas de perturbations incompressibles	87
5.4	Mécanisme de l'instabilité	88
5.5	Variations parallèles des perturbations	91
5.6	Effets de géométrie	92
6	Déstabilisation des jets par instabilité de pression	95
6.1	Équilibre cylindrique sans rotation	95
6.1.1	Géométrie du système	95
6.1.2	Équations de dispersion	96
6.1.3	Étude des racines	98
6.1.4	Modes à $\omega^2 < 0$	99
6.1.5	Domaine de validité de cette approche	100
6.1.6	Z pinch	102
6.2	Rotation solide	103
6.2.1	Expression des forces	103
6.2.2	Equation de dispersion	104
6.3	Analyse des critères d'instabilité	107
6.3.1	Voisinage de l'axe	107
6.3.2	Confinement par le champ magnétique azimuthal	109
6.4	Conclusion	111

Publication : “MHD instabilities in rotating jets”	113
 III MHD numérique en Astrophysique	 127
1 Introduction aux concepts de la discipline	129
1.1 Apports de la MHD numérique en Astrophysique	129
1.2 Généralités sur la résolution des EDP	130
1.2.1 Classes des équations aux dérivées partielles	130
1.2.2 Techniques de discrétisation	131
1.2.3 Propriétés et méthodes d’analyse des schémas numériques	133
1.3 Particularités propres à la MHD	136
 2 Travaux engagés dans le développement d’un code MHD	 139
2.1 Introduction	139
2.2 Intégration numérique des équations de la MHD	141
2.2.1 Équations de la MHD	141
2.2.2 Discrétisation de l’espace-temps	144
2.2.3 Schéma d’intégration spatiale	145
2.2.4 Schéma d’intégration en temps	148
2.3 Traitement des frontières	151
2.3.1 Conditions aux limites physiques	152
2.3.2 Conditions aux limites numériques	152
2.4 Différentes configurations géométriques	156
2.4.1 Géométrie cartésienne	156
2.4.2 Approximation « shearing sheet »	157
2.5 Nécessité de la dissipation numérique	160
2.5.1 Dissipation élémentaire	162
2.5.2 Capture de chocs	163
2.5.3 Hyper-viscosité	164
2.6 Parallélisation	166
2.7 Validité du programme	168
2.7.1 Tests caractéristiques	169
2.7.2 Simulation d’instabilités	179
2.7.3 Conclusion sur les études numériques	185
 IV Accélération de rayons cosmiques dans les Gamma-Ray Bursts	 187
Publication : “Acceleration of UHECR in GRBs”	189

Annexes	197
A Méthodes d'études des instabilités linéaires	199
A.1 Définition de la stabilité	199
A.2 Linéarisation des équations	201
A.3 Méthode des conditions initiales	202
A.4 Principe de la décomposition en modes propres	203
A.5 Analyse en temps des modes propres	204
A.6 Analyse spatiale des modes propres	204
A.6.1 En milieu homogène	205
A.6.2 Approximation WKB	206
A.6.3 Modes globaux	206
A.6.4 \mathfrak{F} est auto-adjoint	207
A.6.5 Forme du spectre de \mathfrak{F}	208
A.7 Principe de minimisation de l'énergie	208
A.7.1 Formulation variationnelle	209
A.7.2 Principe d'Énergie	209
A.7.3 Principe d'Énergie Généralisé	210
A.7.4 Interprétation physique	212
B Expression générale des équations linéarisées de la MHD	215
B.1 Influence d'un champ de vitesse à l'équilibre	215
B.1.1 Formalisme lagrangien	215
B.1.2 Expression de la fluctuation de vitesse	216
B.1.3 L'équation de continuité	217
B.1.4 L'équation d'induction	220
B.1.5 L'équation d'état	222
B.2 Réduction du système MHD en fonction du déplacement	223
B.2.1 Cadre des calculs	223
B.2.2 Le champ magnétique parallèle \mathfrak{B}_{\parallel}	225
B.2.3 Le champ magnétique perpendiculaire $\vec{\mathfrak{B}}_{\perp}$	226
B.2.4 La force de Lorentz parallèle	227
B.2.5 La force de tension magnétique perpendiculaire	229
B.2.6 La force de pression	230
B.2.7 L'équation du mouvement parallèle	230
B.2.8 L'équation du mouvement perpendiculaire	231
C Description des tenseurs Γ^{\pm}	233
C.1 Composantes diagonales	233
C.2 Composantes non-diagonales	234

D Coefficients des équations de dispersion en géométrie cylindrique	235
D.1 Cas particulier $\vec{\epsilon}_A$ et $\vec{\epsilon}_r$ anti-parallèles	235
D.1.1 Tenseurs géométriques	235
D.1.2 Échelles caractéristiques	237
D.2 Cas général	237
 Références Bibliographiques	 241

Table des figures

Partie I	4
1.1 Image VLA de Centaurus A.	8
1.2 Image VLA de Cygnus A.	9
1.3 Image HST de l'objet HH 47 dans les raies [S II] et H α	10
2.1 Dérive du mouvement cyclotron.	24
2.2 Forces de pression et tension magnétique.	38
2.3 Site de reconnexion magnétique, configuration de Petschek.	40
 Partie II	 48
1.1 Instabilité de kink hélicoïdale.	52
1.2 Instabilités de pression.	53
1.3 Modes de « saucisse ».	53
1.4 Modes de ballooning.	54
1.5 Mécanisme de convection.	56
1.6 Mécanisme d'interchange magnétique.	57
2.1 Vecteur déplacement infinitésimal.	62
2.2 Définition du repère ($\vec{e}_\parallel, \vec{e}_l, \vec{e}_A$).	64
2.3 Propagation d'une onde d'Alfvén.	65
2.4 Célérité des ondes magnétosoniques.	66
5.1 Mode de nature alfvénique.	89
5.2 Mode de nature magnétosonique.	91
5.3 Stabilité et topologie magnétique.	93
5.4 Géométrie du ballooning.	94
5.5 Courbure magnétique et stabilité.	94
6.1 Structure magnétique cylindrique.	96
6.2 Taux de croissance pour différents k_\perp^2	99

Partie III	126
1.1 Caractéristiques d'un problème hyperbolique.	131
1.2 Maillages structuré et non structuré.	132
1.3 Condition CFL.	135
2.1 Discrétisation de l'espace.	145
2.2 Schéma de dérivation spatial.	147
2.3 Schéma numérique « leapfrog ».	150
2.4 Conditions aux limites périodiques.	153
2.5 Conditions aux limites symétriques.	154
2.6 Conditions aux limites anti-symétriques.	154
2.7 Artéfact dû aux conditions aux limites anti-symétriques.	155
2.8 Description cartésienne d'un flot rotationnel.	157
2.9 Approximation « shearing sheet ».	158
2.10 Conditions aux limites « shearing sheet ».	159
2.11 Traitement des discontinuités par des schémas d'ordre élevé.	161
2.12 Caractéristiques du test de Riemann.	169
2.13 Conditions initiales du test de Riemann.	170
2.14 Test de Riemann, discontinuité étroite et sans dissipation numérique	171
2.15 Test de Riemann, discontinuité étroite et dissipation sur dix points.	172
2.16 Test de Riemann avec une modification du schéma dissipatif.	172
2.17 Élargissement des profils de discontinuité.	173
2.18 Test de Riemann, discontinuité élargie et sans dissipation.	174
2.19 Test de Riemann, discontinuité élargie et avec une dissipation sur six points.	174
2.20 Caractéristiques du test de Riemann MHD.	175
2.21 Test de Riemann MHD, discontinuité sur cinq points de grille.	176
2.22 Test de Riemann MHD, discontinuité élargie, avec dissipation.	177
2.23 Test de Riemann MHD, discontinuité élargie.	178
2.24 Test de Riemann MHD, discontinuité élargie sur dix points de grille.	179
2.25 KH en champ magnétique perpendiculaire.	181
2.26 KH dans un saut de densité.	182
2.27 KH parallèle, tracés des lignes de courant et de champ magnétique.	183
2.28 KH en champ magnétique parallèle, évolution de la densité.	184
Annexes	197
A.1 Analogie mécanique des mécanismes d'instabilité.	200
B.1 Trajectoires fluides, d'équilibre et perturbée.	215
B.2 Perturbation d'un élément fluide.	219

B.3	Définition du repère local $(\vec{e}_\parallel, \vec{e}_l, \vec{e}_A)$	224
C.1	Évasement des lignes de champ.	233
C.2	Cisaillement des lignes de champ.	234
C.3	Torsion des lignes de champ.	234

Liste des tableaux

Partie I	4
2.1 Longueurs de Debye caractéristiques.	25
 Partie III	 126
2.1 Conditions initiales, KH en champ magnétique perpendiculaire.	181
2.2 Conditions initiales, KH dans un saut de densité.	182
2.3 Conditions initiales, KH en champ magnétique parallèle.	183

Introduction

Les phénomènes d'éjection sont omniprésents dans l'Univers, en particulier au sein des noyaux actifs de galaxies ou durant les phases pré-séquence principale de la formation stellaire. Par ailleurs, afin de rendre compte du rayonnement de ces objets, l'accrétion de matière dans un disque est invoquée car ce processus constitue un moyen extrêmement efficace de libération d'énergie ; en outre, le modèle du disque d'accrétion s'insère naturellement dans l'évolution des effondrements de gaz qui conduisent à la formation d'objets stellaires.

L'observation des jets extragalactiques ainsi que la modélisation des structures d'accrétion-éjection montrent que le champ magnétique a dans leur dynamique une influence majeure ; les études, alors effectuées dans le cadre de la MHD, prouvent qu'il fournit un moyen puissant de confinement de la matière sur des distances parfois supérieures au Mpc et qu'il contrôle également des mécanismes très efficaces produisant l'éjection de matière.

Dans les disques en rotation autour d'objets compacts, tels que des trous noirs ou des étoiles en formations, l'accrétion de matière est nécessairement produite par un mécanisme dissipatif d'origine turbulente. Plusieurs moyens de rendre les disques d'accrétion turbulents ont été proposés, mais le développement non linéaire de l'instabilité MHD dite magnéto-rotationnelle semble, à ce jour, être le plus prometteur. Cependant, cette instabilité peut se développer dans les disques d'accrétion uniquement lorsque la pression thermique du plasma est dominante devant la pression magnétique ; or, une classe très générale de modèles de disques minces nécessite l'équipartition. De plus, cette instabilité, dont le moteur réside dans la rotation différentielle, rend difficilement compte des processus éruptifs qui se développent dans certains objets tels que les microquasars galactiques.

Les jets astrophysiques présentent des propriétés de stabilité globale remarquables. Néanmoins, les observations comme les simulations numériques montrent qu'ils sont localement instables. Les études de stabilité de ces structures portent principalement sur le développement des modes de Kelvin-Helmholtz provenant de l'interaction de la matière éjectée avec le milieu inter-stellaire ou inter-galactique environnant. D'autres mécanismes, globaux, tels que les instabilités de kink, semblent également attirer l'attention de la communauté astrophysique.

Nous nous sommes intéressés à un processus instable, non considéré jusqu'à présent dans les systèmes d'accrétion-éjection, et ce, malgré l'intérêt qu'il suscite et les caractéristiques

intéressantes qu'il présente dans le domaine de la fusion thermonucléaire mais également en physique spatiale ou solaire. Il s'agit d'une instabilité purement MHD, dite de pression, dont l'origine provient directement du confinement d'un plasma par le champ magnétique. À travers les modes dits d'interchange ou de ballooning, localisés, elle présente deux formes de développements éruptifs distincts mais découlant toutefois d'une origine mécanique commune.

Nous nous sommes appliqués à l'étude des instabilités de pression, car, d'une part nous espérons les voir produire de la turbulence dans les disques d'accrétion, au voisinage de l'équipartition. Leur caractère explosif est, en outre, un atout pour expliquer l'origine des comportements très variables et désordonnés observés dans les microquasars.

D'autre part, nous nous attendons à ce que ces instabilités de pression participent à la déstabilisation du cœur des jets astrophysiques, afin d'y injecter l'énergie qu'ils transforment ensuite en rayonnement. De plus, nous nous attendons dans les jets à ce que les signatures éruptives des modes d'interchange ou de ballooning se traduisent par la génération des surdensités lumineuses observées.

Afin de mener l'étude linéaire des instabilités de pression dans un contexte astrophysique en terme de modes propres, nous avons établi un cadre de travail particulier, en résolvant les équations linéaires générales de la MHD, incluant différentes formes d'hétérogénéités du plasma.

En parallèle avec ces travaux analytiques, nous nous sommes investis dans le développement d'outils numériques lourds, appliqués à la résolution de problèmes MHD en astrophysique. Il est évident que la complexité des traitements analytiques en MHD restreint considérablement les études : pour les mener de manière plus complète, il est nécessaire d'utiliser de codes de simulation numérique. La puissance des centres de calcul fait aujourd'hui de l'outil numérique un atout performant ; cependant, les techniques mises en jeu dans le but de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles couplées, tel que celui de la MHD, demandent des connaissances approfondies sur, par exemple, les façons de discrétiser un problème et de traiter ses limites ou l'analyse d'algorithmes de calcul.

Nous avons par ailleurs démarré une activité liée à l'accélération de particules dans les objets astrophysiques associés aux spectaculaires sursauts de rayonnement gamma ou gamma-ray bursts (GRBs dans la suite). Les GRBs, événements extrêmement énergétiques, (typiquement 10^{51} erg), sont supposés provenir de la coalescence d'objets stellaires compacts ou de l'effondrement d'une étoile hypermassive ($\sim 10^{10} M_{\odot}$) en rotation rapide. Le scénario de leur formation reste mal compris, cependant, le modèle de la « boule de feu » ou fireball focalise l'essentiel des activités dans le domaine ; il stipule que l'énergie émise sous forme de rayonnement gamma provient d'une coquille compacte, constituée d'un plasma très chaud en mouvement ultra-relativiste le long de lignes de champ magnétique poloidales.

Nous envisageons les GRBs comme les foyers de l'accélération de rayons cosmiques de très haute énergie — particules dont les énergies s'étendent au-delà de la limite GZK de 3×10^{19} ev, jusqu'à plus de 10^{21} ev pour quelques événements — dont l'origine reste indéterminée. Le

scénario que nous proposons invoque des processus d'accélération de Fermi agissant lors du croisement de perturbations alfvéniques relativistes. Ces fronts sont générés par une instabilité faisceau-plasma qui convertit l'énergie cinétique de baryons (matière résiduelle de l'événement central du GRB) pénétrant dans la coquille, en fluctuations magnétiques. Un mécanisme de rétro-diffusion permet de produire à la fois des fronts d'Alfvén relativistes progressifs, régressifs ainsi que des perturbations magnéto-soniques qui vont chauffer le plasma.

Ce manuscrit décrit l'essentiel de nos activités sur l'étude des instabilités liées au champ magnétique en astrophysique. Dans la première partie nous présentons le contexte général de notre travail, avec la modélisation des structures d'accrétion-éjection ainsi que les hypothèses et le formalisme de la MHD, puis nous donnons un aperçu du panel des différents travaux menés sur les instabilités de disques et de jets.

La seconde partie porte sur les instabilités de pression. Nous les introduisons avant de regarder l'évolution de perturbations linéaires dans un plasma homogène, ce qui nous sert ensuite à établir un cadre d'approximation pour l'étude du ballooning et de l'interchange. Nous dérivons alors des équations linéaires générales que nous appliquons finalement à un plasma MHD pur puis à une structure cylindrique en rotation.

La troisième partie du manuscrit commence par une description des propriétés et des méthodes d'analyse des schémas de calcul numérique, avant de présenter nos propres développements dans cette discipline. Ceux-ci portent sur le choix des algorithmes, l'implémentation de conditions aux limites, la géométrie des simulations, les méthodes de stabilisation des calculs, puis certains tests caractéristiques.

Un article, qui pose les jalons de l'accélération de rayons cosmiques de très haute énergie dans les GRBs, compose la quatrième et dernière partie du texte. Outre l'explication de la production de rayons cosmiques, il donne une vision globale de l'hydrodynamique relativiste de la coquille en expansion, à l'origine du sursaut de rayonnement gamma.

Première partie

Mécanismes instables dans les structures d'accrétion-éjection magnétisées et génération de turbulence

Chapitre 1

Structures d'accrétion-éjection magnétiques

Sommaire

1.1	Éjections de matière	7
1.2	Disques d'accrétion	13
1.3	Symbiose de l'accrétion et de l'éjection	16
1.4	Simulations numériques d'accrétion et d'éjection	18

1.1 Éjections de matière

Outre leur caractère spectaculaire, les éjections de matière sont des processus extrêmement étudiés en astrophysique du fait de leur omniprésence dans l'Univers ; en effet, ces flots s'observent dans des contextes multiples, non seulement aux différents stades de l'évolution des systèmes stellaires mais aussi à l'échelle galactique, dans les noyaux actifs de galaxies — NAGs par la suite. Les éjections de matière se différencient suivant l'origine et la composition de la matière, les mécanismes d'éjection, les énergies mises en jeu, leur caractère plus ou moins collimaté ou leurs propriétés radiatives.

Dans cette section nous allons effectuer une brève description de l'état actuel des recherches portant sur la dynamique des flots de matière collimatés ; nous les qualifierons de jets par opposition aux flots non collimatés associés plutôt à une structure de vent (vent stellaire, étoile évoluée de type AGB évacuant ses couches externes, supernovæ, etc.). Les objets qui nous concernent sont, d'une part certaines classes de NAGs montrant des jets à petite ou à grande échelle, d'autre part les étoiles jeunes, en formation, jusqu'à leur phase T-Tauri ; mais il existe également des phénomènes d'éjection liés, par exemple, aux variables cataclysmiques ainsi qu'aux systèmes binaires X.

1.1.1 Jets dans les noyaux actifs de galaxie

La caractéristique commune des NAGs est d’avoir en leur centre une zone compacte (d’une taille voisine de celle du système solaire) mais néanmoins extrêmement brillante, dont la luminosité varie entre 10^8 et $10^{14}L_{\odot}$ ¹. Outre cette émission beaucoup plus importante que pour les galaxies ordinaires — la zone compacte émet à elle seule autant voire plus qu’une galaxie normale — les propriétés spectroscopiques des NAGs ne sont pas reproductibles par une somme de différentes composantes stellaires ; en particulier, les spectres présentent des raies en émission et d’importants aspects non thermiques, entre autres dans les domaines radio, X et gamma. De nombreux travaux ont eu pour but d’extraire les caractéristiques propres des NAGs et d’en déduire une classification (Antonucci, 1993; Osterbrock, 1993; Urry & Padovani, 1995). Notre intérêt va se porter plus particulièrement sur les 10% de NAGs forts émetteurs radio — ou « Radio Loud » — car cette forte luminosité dans le domaine de fréquence 1-10 GHz est étroitement liée à la présence de jets de matière ionisée ; elle est produite par le rayonnement synchrotron dû aux pertes d’énergie des électrons qui spiralent autour des lignes de champ magnétique.



FIG. 1.1 – Image VLA de *Centaurus A*.

Nous pouvons distinguer deux cas de figures suivant l’étendue spatiale de la source émettrice du rayonnement radio. Lorsque la source s’étend sur des échelles de l’ordre de quelques dizaines de kpc² (environ le diamètre galactique), jusqu’à des distances considérables de quelques Mpc — la distance intergalactique dans un amas de galaxie est elle-même de cet ordre — on parle de source étendue ; en revanche, si l’origine de l’émission radio n’est pas résolue à l’échelle de la seconde d’arc, on considère alors la source compacte.

À titre d’illustration, nous voyons sur la figure 1.1 une image de la galaxie active *Centaurus A* obtenue avec le VLA³. Cet objet présente une caractéristique propre des sources étendues, à savoir une émission radio produite par deux lobes

relativement symétriques. Toutefois, son appartenance à la classe des NAGs de type FRI, d’après la classification de Fanaroff & Riley (1974), traduit le fait que sa luminosité radio reste peu importante et décroît lorsque le jet s’éloigne de la source en s’évasant. Par comparaison, sur la figure 1.2 nous voyons le NAG *Cygnus A*, de type FR II, dont la très forte

1. La luminosité solaire, L_{\odot} , vaut 3.826×10^{26} W.

2. 1 pc \simeq 3,26 année-lumière $\simeq 2.06 \times 10^5$ UA $\simeq 3.086 \times 10^{16}$ m ; le parsec est l’échelle appropriée à l’étude des galaxies.

3. “Very Large Array”, interféromètre radio composé de 27 antennes arrangées en Y et permettant d’atteindre des résolutions de 6 à 0.05 arcsec suivant le choix de bande spectrale.

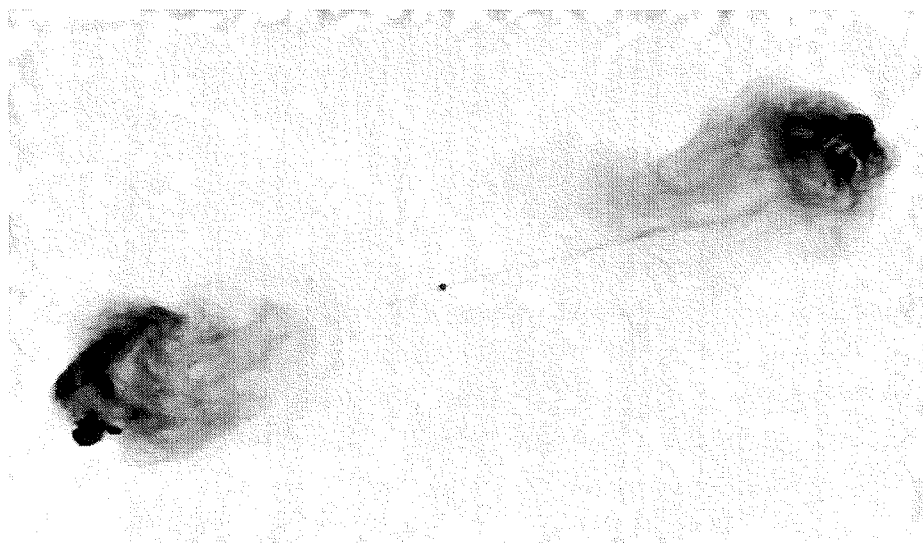


FIG. 1.2 – Image VLA de Cygnus A.

émission radio ($L > 10^{42} \text{erg} \cdot \text{s}^{-1}$) est complètement dominée par les points chauds terminaux — d'une taille de l'ordre du kpc — dus à des chocs avec le milieu intergalactique, au point de rendre « invisible » le jet lui-même. Les lobes radio des FRI et FRII semblent toujours provenir de la partie centrale de la galaxie elliptique mère et leurs formes complexes s'expliquent par les interactions entre la matière éjectée et la poussière présente en quantité importante au voisinage de galaxies elliptiques.

L'avènement des techniques VLBI⁴ a permis l'observation à l'échelle du parsec de nombreuses sources compactes — dont l'émission est dominée par la région centrale qui coïncide avec la zone d'émission optique du NAG — telles que les blazards. À ces échelles apparaissent des structures unipolaires et très collimatées, formées de nodosités présentant parfois, en projection sur le ciel, des mouvements superluminiques ; ces aberrations découlent d'une composante importante de la vitesse relativiste de la matière suivant la ligne de visée de l'observateur. La nécessité d'une zone d'émission relativiste fut soulignée par Rees (1967) pour éviter la catastrophe « Compton-inverse ». Il s'avère également que des observations VLBI de sources étendues dévoilent des structures identiques à l'échelle de la milliseconde d'arc. Deux scénarii proposent une origine possible de ces structures VLBI : soit il s'agit déjà du jet perçu à grande échelle, soit, suivant la proposition de Henri & Pelletier (1991), à l'échelle du parsec, au voisinage du cœur galactique, nous recevons les photons émis par un plasma ténu ultra-relativiste, composé de paires électron-positron.

La polarisation des photons synchrotron des jets de NAGs est fortement corrélée à la structure du champ magnétique. Comme le montrent Perlman *et al.* (1999) dans l'étude de la galaxie radio Messier 87, les endroits présentant des surintensités (ou nœuds), séparés par des

4. "Very Long Baseline Interferometry", mode interférométrique possédant des lignes de bases transcontinentales et qui conduit à des résolutions de quelques dixièmes de milliseconde d'arc.

régions peu brillantes, montrent également une très forte polarisation du rayonnement, ce qui suggère un champ magnétique très bien ordonné. Bien que moins importante, la polarisation des régions entre les différents nœuds semble aussi être associée à un champ magnétique structuré.

1.1.2 Jets dans les étoiles jeunes

La séquence évolutive généralement admise (Adams *et al.*, 1987) de la formation des objets stellaires de faible masse (c'est-à-dire pour des masses inférieures à $2 M_{\odot}$) se termine par la phase dite T-Tauri ; jusqu'à ce stade, une fraction de la matière du nuage moléculaire primordial est éjectée depuis l'environnement de la condensation centrale. Ces flots, collimatés, s'organisent de façon bipolaire et symétrique de part et d'autre de l'étoile et se terminent par des chocs avec le milieu interstellaire ; ils constituent un moyen efficace d'extraire une partie du moment angulaire présent dans le nuage initial, condition nécessaire à la formation stellaire. Contrairement aux étoiles de faible masse, d'âge inférieur à 10^5 ans, pour les étoiles pré-séquence principale Ae/Be de Herbig, de masse intermédiaire, il est impossible d'imager les éjections, mais celles-ci ont toutefois pu être mises en évidence par des méthodes de spectroscopie en longue fente (Corcoran & Ray, 1998) ; les éjections de matière durant la phase évoluée T-tauri sont observées par des techniques semblables.

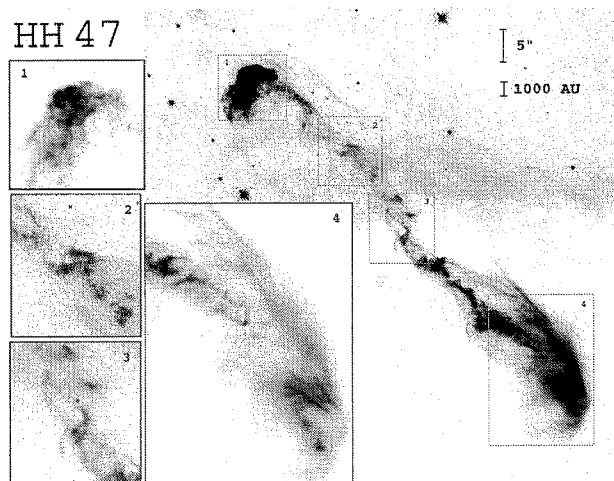


FIG. 1.3 – Image *HST* de l'objet HH 47 dans les raies $[S II]$ et H_{α} .

Les observations de jets d'étoiles jeunes présentent deux composantes distinctes observables, d'une part en radio, d'autre part dans le domaine optique. Bien que très riches en informations, ces observations ne peuvent toutefois conduire à caractériser les jets qu'à travers des modélisations des processus physiques, dynamiques et radiatifs, nécessairement réduits. À partir de l'observation des transitions rotationnelles des molécules de CO, SiO, CS, HCN dans les flots moléculaires, Bachiller & Gomez-Gonzales (1992) entre autres, suggèrent au regard de leurs profils de vitesse et de leurs caractéristiques d'évasement que les flots moléculaires résultent de l'entraînement de la matière au voisinage de l'étoile suite à un choc en arc avec une seconde composante de jet plus rapide. Ces flots moléculaires s'étendent sur des distances allant du dixième de parsec à quelques parsecs et s'évasent avec des angles d'ouverture compris entre 7.5 et 14 degrés.

La seconde composante de jet, observable en optique sur des distances de l'ordre du parsec,

est composée de matière plus rapide. Les propriétés du jet optique sont principalement tirées de l'observation des raies interdites des ions [S II], [N II] ou des atomes [O I]. Compte tenu de leur faible probabilité de transition, l'émission de photons dans les raies interdites doit se faire par désexcitation collisionnelle ; pour cette raison ces raies sont étudiées comme des traceurs des zones denses, ou noeuds, généralement interprétés comme des chocs terminaux ou internes au jet. La figure 1.3, obtenue par Heathcote *et al.* (1996), montre l'objet de Herbig-Haro, HH 47, observé en [S II] et H_α par le HST⁵. La figure présente plusieurs vignettes, montrant des vues agrandies de certaines parties du flot :

1. le choc terminal HH 47A,
2. la région proche du nœud A₁₆ placé dans une courbe importante du jet,
3. les filaments H_α associés aux nœuds A₂₂ et A₂₆,
4. la base du jet comprenant la zone HH 46 et ses filaments en H_α .

Que ce soit en astrophysique stellaire ou extragalactique, nous avons vu que la présence de jets de matière est une caractéristique commune à de nombreux systèmes. Pour les objets en question, la production des flots de matière que nous avons mentionnés n'est pas un état permanent mais semble plutôt correspondre à une phase particulière de leur évolution. Cette proposition est évidente pour les étoiles qui, à leur entrée sur la séquence principale — phase associée au début du brûlage de l'hydrogène — ne présentent plus de structure de jet énergétique et collimaté. Quant aux galaxies, rien ne permet a priori de dire qu'elles peuvent toutes potentiellement avoir été ou devenir actives, néanmoins les recherches portant sur la fonction de luminosité et la distribution en « redshift » de certains NAGs (Boyle *et al.*, 1987), déterminent un pic dans la distribution temporelle pour $Z \sim 2.2$ avec une durée de la période active de l'ordre de 10^{10} ans.

1.1.3 Modélisation de la dynamique de jets

Le rôle des modèles de jets est de donner une bonne compréhension de la physique de ces objets ; en particulier, la modélisation du transfert radiatif doit rendre compte des résultats d'observations, tant du point de vue des flux lumineux que des caractéristiques spectrales ou des propriétés de variabilité. Cependant, une étape antérieure à celle de l'étude du rayonnement consiste à comprendre comment ces structures peuvent exister sur un plan dynamique. Pour y arriver, il nous faut répondre à différentes questions majeures sur l'origine de la matière éjectée — que nous discuterons dans la section 1.2 — les mécanismes d'éjection puis ceux de confinement des flots ; il faut également expliquer la façon dont l'énergie est déposée dans les régions internes que l'on voit briller — les noeuds dans les jets d'étoiles jeunes et des galaxies radio ou la composante super-luminique de certains NAGs.

Plusieurs idées furent avancées pour expliquer le lancement de matière à partir d'un réservoir initial et son confinement au cours de son déplacement (Blandford, 1993). Actuellement

5. Hubble Space Telescope.

la majorité des *scenarii* proposés ne se fondent ni sur des processus hydrodynamiques ni sur des processus radiatif purs — vraisemblablement inefficaces ou très contraints pour les étoiles jeunes (De Campli, 1981) ainsi que pour les NAGs (Norman *et al.*, 1981) — mais plutôt sur une dynamique contrôlée par le champ magnétique. En effet, ainsi que nous l’avons mentionné, les études polarimétriques des NAGs en radio montrent au niveau des points brillants mais aussi entre ces points l’existence d’un champ magnétique ordonné; compte tenu de la nature ionisée de la matière du flot nous nous attendons à ce qu’il joue un rôle important sur le plan dynamique. Dans le cas des étoiles jeunes, Strom *et al.* (1986) ont également montré la présence d’une composante de champ magnétique parallèle à l’écoulement du jet optique très collimaté.

Depuis les travaux de Lovelace (1976), entre autres, qui présument de l’importance dynamique du champ magnétique, à peu près l’ensemble des études tend à démontrer qu’il a le pouvoir, d’une part de guider le flot de matière tout en conservant, au moins en partie, le contrôle de son évasement, et d’autre part d’être surtout le seul intermédiaire efficace dans le processus qui fournit l’énergie de la masse éjectée. Bien qu’il n’y ait aucune preuve observationnelle que les mécanismes de lancement et de collimation des jets soient intimement liés à la présence du champ magnétique, un raisonnement très pragmatique conduit à la conclusion que cela ne peut être autrement. Dans le cas des NAGs il est évident que la pression du milieu intergalactique, très peu dense, n’est pas en mesure d’assurer la collimation des flots; par ailleurs la polarisation observée du rayonnement synchrotron montre un champ magnétique cohérent, dont il est légitime de penser qu’il va influencer sur la dynamique du plasma à l’échelle du kpc, mais également à l’échelle VLBI. Cette réflexion, portant sur les NAGs, peut être transposée au cas des étoiles jeunes. Néanmoins, dans ce contexte le milieu extérieur et le champ magnétique coexistent et peuvent jouer des rôles similaires dans le confinement, avec des importances relatives plus ou moins prononcées (Sauty *et al.*, 1999).

1.1.4 Approche numérique de l’étude des jets

L’étude de la dynamique des jets dans leur globalité est évidemment fort complexe, c’est pourquoi très rapidement, dès que les codes appropriés furent développés, de nombreuses simulations numériques sont venues compléter les recherches analytiques et observationnelles concernant ces objets. Les simulations, dans un premier temps hydrodynamiques puis magnétohydrodynamiques — MHD dans la suite du manuscrit — ont essayé de mettre en évidence la phénoménologie des écoulements: leur confinement, la formation et l’évolution des chocs internes puis du choc terminal, ainsi que leurs propriétés de stabilité. Les premières simulations hydrodynamiques à deux dimensions effectuées par Norman *et al.* (1982) puis en trois dimensions par Arnold & Arnett (1986) — qui viennent corroborer la thèse proposée par Blandford & Rees (1974) de jets non magnétiques, propulsés par un effet de tuyère dû à la pression de la matière au voisinage des NAGs — montrent déjà des caractéristiques intéressantes des galaxies radio: les jets présentent des chocs internes — produits par des instabilités de Kelvin-Helmholtz — et l’on voit un cocon se créer autour du faisceau rapide. Ces simu-

lations produisant des lobes similaires à ceux des galaxies radio sont suivies par les travaux numériques de Stone & Norman (1993a,b, 1994b) sur les jets proto-stellaires dans lesquels ils affinent le traitement hydrodynamique par la prise en compte des termes de pertes radiatives. Cependant, ces études restent incomplètes, en particulier pour les objets extragalactiques, car elles sont en désaccord avec certaines estimations du rapport entre les pressions interne et externe (Potash & Wardle, 1980) qui incitent à penser que le champ magnétique doit contribuer au confinement. Des simulations MHD prenant en compte une collimation de la matière par un champ magnétique azimuthal sont alors effectuées par Clarke *et al.* (1986) puis Lind *et al.* (1989). Dans un contexte favorisé par des moyens informatiques de plus en plus performants, ces premières simulations sont suivies par des études plus détaillées portant, par exemple, sur la formation de cocon (Rosen *et al.*, 1999) ou de façon plus générale sur la stabilité des structures (Hardee *et al.*, 1995; Hardee & Clarke, 1995a,b).

Ces simulations permettent de rendre partiellement compte de la physique des jets dans le voisinage de la zone de lancement de la matière. Elles montrent en effet des propriétés que l’on peut confronter directement aux observations; cependant, comme dans toute modélisation numérique, se pose le problème du choix des conditions initiales, en particulier la détermination des caractéristiques physiques de la matière et du champ magnétique à la base du jet. Ce point est crucial car il existe une forte dépendance du développement de l’instabilité de Kelvin-Helmholtz avec le régime super-alfénique ou super-magnétosonique du plasma et la géométrie du champ magnétique (Hardee & Rosen, 1999). Cela conduit à penser que pour gagner en réalisme, les simulations numériques de flots ne doivent plus se contenter de montrer l’évolution de l’écoulement mais doivent également montrer la formation du jet à partir d’un réservoir de masse.

1.2 Disques d’accrétion

1.2.1 Accrétion dans les NAGs et les étoiles jeunes

Une nécessité dans les NAGs

Suivant l’idée initiale de Lynden-Bell (1969), aujourd’hui admise par l’ensemble de la communauté astrophysique, l’accrétion de matière dans un disque en rotation autour d’un objet compact est le seul mécanisme susceptible d’expliquer la forte luminosité des NAGs; en effet, la chute de matière dans un puits de potentiel gravitationnel libère d’autant plus d’énergie que le champ de gravitation est créé par une masse importante peu étendue spatialement (Salpeter, 1964) et montre, lorsque la compacité est suffisante, un rendement bien meilleur que les processus de physique nucléaire. En particulier, pour rendre compte du rayonnement produit par les NAGs — et d’aspects dynamiques (Kormendy & Richstone, 1995) — celui-ci doit découler de la conversion de l’énergie potentielle gravitationnelle due à l’accrétion d’un plasma autour d’un trou noir super-massif, constitué d’une masse de 10^6 à $10^{10} M_{\odot}$ dans un volume de quelques parsecs.

Considérer que l'accrétion s'effectue dans un disque semble plus pertinent que de considérer une géométrie globalement sphérique, non seulement pour des raisons dynamiques liées au moment angulaire de la matière accrétée, mais aussi parce qu'une géométrie plane conduit à une plus grande luminosité et conserve le caractère anisotrope des NAGs — visible notamment par la présence des jets radio.

Une forte présomption dans les étoiles jeunes

Poussés par l'intérêt que présentent les étoiles jeunes comme "laboratoire" pour l'étude de l'accrétion dans les NAGs, Lynden-Bell & Pringle (1974) sont les premiers à avoir publié les profils des grandeurs physiques dans un disque d'accrétion de matière autour d'une étoile de type T-Tauri. Ainsi que le mentionne Larson (1973) dans sa revue, la formation d'un disque d'accrétion paraît être une évolution naturelle de l'effondrement gravitationnel de nuages interstellaires. Plusieurs simulations numériques, telles que celles de Terebey *et al.* (1984) par exemple, viennent appuyer cette hypothèse. Bien que, comme pour les NAGs, il n'y ait pas non plus dans le cas des étoiles jeunes de vérification directe de la présence de disque d'accrétion, certaines observations récentes de disques proto-planétaires laissent à penser qu'ils sont constitués des restes de l'accrétion s'effectuant dans une phase moins évoluée de l'étoile — la dernière phase de la classification de Adams *et al.* (1987).

1.2.2 Modèle standard

Les phénomènes d'accrétion s'expliquent par des effets de dissipation qui conduisent au transport de la matière et de son moment angulaire à travers le milieu. Le modèle développé par Shakura & Sunyaev (1973), dans une étude sur les binaires X, a été adopté comme le modèle standard des disques d'accrétion quasi-keplerien, géométriquement minces et optiquement épais ; bien que très simple et loin de rendre compte de toutes les situations, il a permis d'extraire de nombreuses informations sur la dynamique de l'accrétion et sur les propriétés du rayonnement qui doit accompagner ce phénomène.

Comme nous l'avons vu, le grand intérêt des disques d'accrétion réside dans le fait, au moins pour les NAGs, qu'ils peuvent libérer une quantité importante d'énergie potentielle pour éventuellement la convertir en radiations. Si nous arrivons à extraire de l'énergie et du moment angulaire d'une particule en mouvement dans le champ de gravitation créé par un objet compact, celle-ci va quitter son orbite et tomber en spirale vers la masse centrale. Ce faisant, la particule va libérer une certaine quantité d'énergie qui, pour des orbites basses représente une fraction significative de sa masse au repos (de l'ordre de 10% pour une étoile à neutron). L'accrétion d'un fluide, ou dans notre cas d'un plasma, est justement un mécanisme permettant d'extraire cette énergie et ce moment angulaire afin de les redistribuer en même temps que la matière.

Dans le modèle standard, par un « frottement visqueux », chaque couche de matière, en rotation à une vitesse supersonique, est accélérée par sa voisine interne et ralentie par sa

voisine externe. Ainsi, sous l'effet d'un couple visqueux, le plasma tombe globalement dans le puits de potentiel tout en évacuant son moment angulaire vers les limites externes du disque. Bien entendu, le frottement visqueux dissipe de l'énergie que l'on retrouve sous forme d'énergie interne dans le plasma. C'est ce réservoir qui est ensuite irradié : dans le modèle standard, où chaque anneau de disque émet comme un corps noir, on trouve une variation de la température avec le rayon en $T \propto R^{-3/4}$ et une luminosité dans une gamme de fréquences centrée sur ν donnée par :

$$L_\nu \propto \nu^3 \int_{R_\star}^{R_\infty} \frac{r}{\exp(\frac{h\nu}{kT(r)}) - 1} dr,$$

où l'intégration porte sur toute la surface du disque, entre les rayons interne R_\star et externe R_∞ . Cette relation montre que, dans le contexte des NAGs, le disque standard doit émettre dans l'ultraviolet et s'observer dans l'ultraviolet proche voire le visible compte tenu du décalage vers le rouge d'origine cosmologique ; cette composante du spectre des NAGs est appelée « blue bump ». En revanche, dans le cadre des étoiles jeunes, le disque d'accrétion est moins chaud — car l'objet central est moins massif — et conduit à une émission lumineuse cette fois dans l'infrarouge.

Malgré la compréhension du phénomène d'accrétion qu'apporte le modèle standard, il manque de généralité et il est parfois nécessaire de l'affiner ou de lui apporter des modifications. Ces compléments vont, le cas échéant, des corrections de relativité générale dans le voisinage du trou noir, au traitement des disques optiquement minces, qui voient leur température augmenter et dont la pression plus forte que dans le modèle standard conduit à épaissir le disque (Shapiro *et al.*, 1976). D'autres prolongements du modèle de Shakura & Sunyaev (1973) tiennent compte de la possibilité d'advecter l'énergie libérée vers les régions centrales et d'élever ainsi leur température (Narayan & Yi, 1995a,b) ou d'avoir des disques magnétisés.

Le rendement de l'accrétion dans la conversion de l'énergie gravitationnelle en luminosité est évidemment étroitement lié à la masse de l'objet central, mais aussi à l'efficacité des processus de transfert de rayonnement ainsi qu'à la nature du mécanisme de dissipation impliqué. Précédemment nous avons qualifié ce dernier de « frottement visqueux », mais il doit s'agir en pratique d'une autre forme de dissipation que la viscosité moléculaire, car il est démontré que celle-ci ne permet pas de reproduire les luminosités observées (Pringle, 1981; Frank *et al.*, 1992); pour rendre compte des observations il faut que le transport soit, en majeure partie, provoqué par des processus d'origine turbulente. Afin de palier au manque de connaissances sur le mécanisme qui pompe l'énergie mécanique du plasma, Shakura & Sunyaev (1973) ont proposé la prescription phénoménologique dite « α » :

$$\nu = \alpha C_S H,$$

dans laquelle ν représente une viscosité équivalente, C_S la vitesse du son et H l'échelle caractéristique de hauteur du disque, simplement déterminée par l'équilibre hydrostatique vertical.

Toute la méconnaissance du problème de la dissipation est ici reportée dans le paramètre α .

L'origine de la turbulence dans les disques d'accrétion reste aujourd'hui encore un problème largement ouvert. L'instabilité magnéto-rotationnelle semble être un candidat sérieux pour produire un transport conséquent dans les disques d'accrétion ionisés, mais seulement lorsqu'ils sont faiblement magnétisés. En revanche, dans le cas des disques proto-stellaires quasi-kepleriens, dont les conditions thermodynamiques rendent les fractions d'ionisation plus faibles, le problème de l'origine de la turbulence créant le transport se pose toujours (Hawley *et al.*, 1999). Une part importante de l'activité scientifique sur les disques d'accrétion porte sur l'étude des instabilités susceptibles de développer une turbulence conduisant à un transport efficace ; comme nous le verrons par la suite dans la section 3.1, durant les dix dernières années, un important travail analytique conjugué à des moyens numériques très performants ont donné lieu à d'importantes avancées dans la compréhension de la turbulence et du transport.

1.3 Symbiose de l'accrétion et de l'éjection

Pour répondre à la question de l'origine de la matière qui forme les jets des NAGs ou des étoiles jeunes, il est très tentant de postuler que le réservoir de masse est constitué par le disque d'accrétion. La démonstration d'un lien entre les jets observés et le paradigme de l'accrétion est assez naturelle dans le cas des NAGs car le cœur de la galaxie active est formé d'un trou noir supermassif, qui par nature ne laisse pas échapper de matière ; le plasma qui compose les structures bipolaires doit donc provenir de l'environnement proche du trou noir, c'est-à-dire de ce qui est supposé être un disque d'accrétion. Pour ce qui est des étoiles jeunes, le lien entre l'accrétion et l'éjection est moins évident car l'étoile peut cette fois jouer le rôle de réservoir de masse. Cependant, certaines corrélations entre les signatures observationnelles de l'accrétion et de l'éjection ont été mises en évidence, par Cabrit *et al.* (1990) ou Hartigan *et al.* (1995) entre autres ; cela nous permet de supposer qu'au moins une partie du flot éjecté provient du disque, sans invalider les modèles où l'éjection est induite par l'interaction entre la magnétosphère de l'étoile et la région intérieure du disque d'accrétion (Shu *et al.*, 1994; Ferreira *et al.*, 2000).

Dans la suite de ce chapitre nous allons supposer que la symbiose entre accrétion et éjection se fait à travers le champ magnétique. La présence de ce champ magnétique dans les structures d'accrétion constitue déjà en elle-même un problème non résolu ; deux mécanismes, nécessitant toutefois un champ fossile, permettent cette forte densité de champ magnétique. D'une part il peut provenir de l'advection d'un champ à plus grande échelle vers la région centrale, dans l'effondrement d'un nuage proto-stellaire par exemple — l'évacuation ou la dissipation de ce champ devient alors problématique — d'autre part il peut être créé localement par un effet dynamo, c'est-à-dire par l'amplification d'une « graine » de champ magnétique à travers des mouvements différentiels ou turbulents.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, Lovelace (1976), Blandford (1976) et Benford (1978) ont montré les premiers l'influence du champ magnétique sur la dynamique des jets mais ce sont les travaux de Chan & Henriksen (1980) qui ont conduit aux premières solutions de jets collimatés par le champ magnétique. Outre son influence sur les jets, le champ magnétique est également présent dans les disques et doit contribuer à la modélisation de leur structure. En allant plus loin dans cette idée et contraints par les échecs des modèles purement hydrodynamique ou radiatif, Blandford & Payne (1982) ont stipulé que le champ magnétique est le médiateur produisant le passage de la matière depuis la surface d'un disque d'accrétion vers un flot collimaté ; le moteur de l'éjection est le mouvement de rotation induit par la masse centrale du disque d'accrétion.

Le processus de lancement de la matière vaut à ces structures le qualificatif de magnéto-centrifuges. Pelletier & Pudritz (1992) ont présenté une configuration hydromagnétique stationnaire et axisymétrique, où l'éjection non relativiste et la collimation d'un plasma se font tout en emportant une partie du moment angulaire du disque. Le jet est non résistif, ce qui signifie que les lignes de champ et la matière qui le composent sont solidaires — c'est le cadre de la MHD idéale. En revanche, la structure magnétique n'est que partiellement ancrée dans le disque résistif afin de permettre l'accrétion et d'avoir une solution stationnaire, mais le champ magnétique est toutefois emporté par le flot de matière et exerce par conséquent un couple de force de freinage — de même nature qu'un couple visqueux — sur le plasma en rotation. En plus d'avoir un mouvement de rotation, ces lignes de champ magnétique sortent du disque en s'évasant ; leur ouverture doit être supérieure à 60° par rapport à la verticale (Blandford & Payne, 1982) pour permettre l'éjection de matière froide. Ainsi, lorsqu'une part du plasma accrété passe dans la zone non résistive, elle est forcée de suivre les lignes de champ magnétique et, sous l'action de la force d'inertie créée par leur rotation, est expulsée hors du disque.

Le modèle magnéto-centrifuge explique le mécanisme de l'éjection à partir d'un disque d'accrétion ; cependant, il ne tient pas compte de la dynamique propre du disque. En effet, il n'est pas a priori évident que les conditions de lancement du jet sont toujours en accord avec les contraintes physiques nécessaires à l'équilibre du disque d'accrétion ; il faut en particulier respecter l'équilibre vertical dont la forte compression magnétique induit un rapport des pressions thermique et magnétique très proche de l'unité. Ferreira & Pelletier (1995) complété par Ferreira (1997) tentent de définir, dans le cadre de la MHD, le régime des paramètres permettant de lancer un jet froid non relativiste et collimaté de plasma à partir des couches superficielles d'un disque d'accrétion mince. Dans ces études, l'essentiel du transport est produit par un couple magnétique au contraire des disques hydrodynamiques où l'on a plutôt affaire à un couple visqueux. Mais cette hypothèse a été relaxée par Casse & Ferreira (2000) qui étudient le cas de couples magnétique et visqueux de même ordre. L'énergie libérée par l'accrétion contribue alors au chauffage du plasma par dissipation visqueuse et par effet joule (dû à la résistivité du plasma) mais une autre fraction de l'énergie disponible est emportée dans le jet sous forme de flux de Poynting. De la même façon que la viscosité des disques

hydrodynamiques doit être turbulente, dans ces structures d'accrétion-éjection magnétisées, la diffusivité magnétique qui permet à la matière d'être accrétée à travers les lignes de champ ne peut être seulement moléculaire mais doit également être produite par de la turbulence.

1.4 Simulations numériques d'accrétion et d'éjection

Les études analytiques sur la physique de l'accrétion-éjection permettent d'extraire certaines caractéristiques importantes en appliquant des principes de conservations élémentaires sur la masse, le moment angulaire, le flux magnétique, l'énergie, etc. Mais, la complexité mathématique intrinsèque au traitement de l'éjection à partir d'un disque d'accrétion contraint à formuler des hypothèses fortes sur la géométrie, telles que l'axisymétrie ou l'auto-similarité poloïdale (dans le plan (r, z) , en géométrie cylindrique) de la structure, ainsi qu'à chercher des solutions stationnaires ; les études analytiques de stabilités linéaires sont menées en aval de ces calculs de configurations d'accrétion-éjection stationnaires.

Afin de relaxer ces contraintes, partiellement ou en totalité, et de considérer le problème de l'accrétion-éjection dépendant du temps tout en conservant un maximum de généralité, il est nécessaire de travailler avec des outils numériques. Les premières simulations montrant le lancement d'un jet à partir d'un disque d'accrétion infiniment mince, sub-keplerien — donc en effondrement — et traversé par un champ magnétique vertical, ont été effectuées par Uchida & Shibata (1985) puis Shibata & Uchida (1986) et ensuite dans un cadre plus général par Stone & Norman (1994a) en prenant en compte la dynamique interne du disque. Cependant, ces solutions ne peuvent pas conduire à une éjection stationnaire car, par hypothèse, le champ magnétique, gelé dans le disque infiniment mince en rotation, est constamment torsadé durant la simulation et aucun processus permettant de le dissiper n'est pris en compte. Le champ magnétique se libère de cette contrainte de façon sporadique en propageant dans le jet une onde d'Alfvén torsionnelle et en évacuant de la matière simultanément. Le mécanisme de lancement n'est pas ici la force centrifuge pensée par Blandford & Payne (1982), mais un gradient de pression dû à la forte composante azimutale créée par la torsion des lignes de champ.

Les simulations MHD de la même nature que celles faites par Stone & Norman (1994a) décrivent, en considérant la dynamique du disque, comment sous l'action d'un couple magnétique (en champ fort), d'une instabilité (en champ faible) ou par un mouvement de rotation sub-keplerien, le disque subit un effondrement radial qui s'accompagne d'un vent non stationnaire.

Dans leur simulation en 2.5 dimensions, Ouyed & Pudritz (1997a,b) ont abordé le problème sous un angle différent ; ils ne considèrent plus le disque — ici en rotation keplerienne — comme faisant partie du problème à étudier, mais l'assimilent à une condition aux limites à la base du flot ; il n'y a par conséquent aucune rétroaction de l'évolution du jet sur celle du disque. Ces travaux montrent l'éjection du plasma par un effet magnéto-centrifuge et sa collimation par le champ azimutal produit par la rotation. Suivant la configuration initiale

du champ magnétique, ces études conduisent à la création intermittente de nœuds, liés à des chocs dans le jet.

À travers les deux approches numériques évoquées ci-dessus, nous voyons d'une part des simulations numériques portant principalement sur l'évolution du disque et d'autre part des simulations de jets où par contre le disque est une condition limite. Les outils numériques ne permettent pas encore de regarder de façon pertinente l'évolution dans le temps de la structure d'accrétion-éjection dans sa globalité. Pour réellement comprendre ces mécanismes, non seulement il faut inclure dans les simulations le disque d'accrétion et le vent associé, mais il est en outre nécessaire de traiter convenablement la structure verticale du disque.

Chapitre 2

Introduction à la magnétohydrodynamique

Sommaire

2.1	Présentation générale	21
2.2	Cadre de la théorie MHD	22
2.3	Équations de la MHD	28
2.4	MHD idéale	39
2.5	Système d'unités de Heaviside-Lorentz	40

2.1 Présentation générale

La magnétohydrodynamique — MHD dans la suite du manuscrit — parfois appelée aussi hydromagnétique, est une branche de la physique permettant d'étudier les propriétés aussi bien des conducteurs fluides que des plasmas — avec toutefois des approximations différentes — lorsqu'ils sont sujets à un champ magnétique. À ses débuts, cette théorie décrivait les propriétés dynamiques des métaux liquides comme le mercure ou les alliages sodium-potassium en présence de champ magnétique. La MHD a subi d'importants développements, initiés en particulier au cours des années 1930-1950 par Hannes Alfvén, à travers l'étude de problèmes astrophysiques ; mais on assiste surtout à l'avènement de cette théorie à partir des années 1950 lorsque la MHD a bénéficié de l'intérêt de la communauté des physiciens pour la production d'énergie électrique par fusion nucléaire contrôlée dans les tokamaks. Dans ces machines, le confinement du plasma, dont la matière baryonique doit fusionner, ne peut se faire par contact solide à cause de la température extrêmement élevée de la matière. L'action d'un champ magnétique fort, imposant le mouvement des particules qui composent le plasma, est une des voies envisagées.

En parallèle, depuis les années 1950, différents projets spatiaux puis des programmes d'observations ont établi l'omniprésence de la matière ionisée et du champ magnétique dans

l'Univers, confirmant ainsi l'intuition d'Hannes Alfvén. La MHD a donc également trouvé dans l'astrophysique un champ très riche d'applications ; celles-ci s'étendent sur un spectre large couvrant, entre autres, la physique spatiale et l'étude des environnements planétaires, la physique de la couronne solaire, la formation stellaire, les études portant sur le milieu interstellaire, etc. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la MHD constitue en particulier un cadre théorique dans lequel doivent s'expliquer, ne serait-ce qu'en partie, les comportements — modélisés à partir d'observations — des structures d'accrétion-éjection dans les NAGs et les étoiles jeunes.

Un milieu conducteur fluide tel qu'un plasma, sujet à un champ magnétique et à des courants induits voit, sur des échelles de temps et d'espace appropriées, sa dynamique considérablement modifiée par rapport à un fluide non magnétisé. Cependant, les équations sur lesquelles est fondée la théorie MHD sont les équations de l'hydrodynamique auxquelles il faut toutefois ajouter les équations d'évolution du champ électromagnétique. Mais la caractéristique majeure de la MHD a trait à l'importance du couplage entre le plasma et le champ : les courants induits dans le fluide, résultant de son mouvement, modifient la structure du champ et, réciproquement, les flux de champ magnétique donnent naissance à des forces mécaniques susceptibles de modifier le mouvement de la matière. Les plasmas MHD sont donc des milieux complexes, extrêmement non linéaires, et dont la physique doit être traitée de façon élaborée.

Comme nous allons le voir par la suite, ce sont les tailles caractéristiques des objets étudiés en astrophysique ainsi que leurs échelles d'évolution, considérables, qui font que des phénomènes MHD de petite incidence, négligés en laboratoire, s'avèrent être de première importance dans l'Univers.

2.2 Cadre de la théorie MHD

Les plasmas sont des milieux constitués de différentes espèces chimiques chargées et éventuellement neutres dans le cas d'une ionisation partielle ; dans le cadre de ce manuscrit nous allons principalement considérer des plasmas formés seulement d'électrons et de protons. Malgré cette différence, fluides et plasmas présentent des comportements très semblables et de façon générale peuvent s'étudier dans le même cadre d'approximation, avec les mêmes outils ; cette propriété est valable bien que des effets collectifs rendent la phénoménologie de la physique des plasmas plus riche que celle des fluides. Cependant, les plasmas sont également sujets à des mécanismes micro-physiques très particuliers d'interactions résonnantes avec des ondes, qui bien sûr ne transparaissent absolument plus dans une approche fluide, mais qui nécessitent un traitement cinétique.

Aussi, une description MHD réaliste de la dynamique d'un plasma magnétisé impose, d'une part que les propriétés du milieu, et des processus qui s'y développent, répondent le plus exactement possible aux hypothèses, parfois sévères, sur lesquelles repose cette théorie.

D'autre part, il faut admettre que la MHD ne permet pas de traiter de façon exhaustive la physique des plasmas car elle ne traduit qu'un comportement « moyen » qui, par exemple, passe outre les processus purement cinétiques mentionnés précédemment.

Une description des plasmas par la MHD nécessite qu'ils puissent être considérés comme des milieux continus et être assimilables à un fluide unique.

Le champ électromagnétique, seul élément qui en milieu conducteur différencie formellement la MHD de l'hydrodynamique, a une influence sur le mouvement uniquement par le champ magnétique; les forces électriques, qu'elles soient d'origine électromagnétique ou électrostatique (produites par d'éventuelles variations locales dans la densité de charge), sont négligeables car, dans une très bonne approximation, le plasma MHD est localement neutre — en conservant néanmoins des courants non nuls. La MHD repose donc simplement sur une vision hydrodynamique du plasma incluant toutefois les forces de Laplace dues à l'action du champ magnétique sur les courants; quant à l'évolution du champ électromagnétique, elle est bien entendu déterminée par les équations de Maxwell. Cependant, sur cette base, le champ et la matière ne sont pas encore totalement couplés: le magnétisme influe effectivement sur le plasma sous l'action de la force de Laplace, mais jusqu'ici rien ne traduit une quelconque rétroaction. La « fermeture » du système se fait à travers une loi d'Ohm reliant la densité de courant — et donc les mouvements de la matière — au champ électromagnétique.

Compte tenu des hypothèses sur lesquelles repose la MHD, un plasma ne peut être traité par cette théorie que sous certaines conditions qui peuvent sembler de prime abord relativement restrictives; mais, nous allons montrer que les plasmas astrophysiques se prêtent bien à ce type de traitement qui permet finalement l'étude précise d'une multitude de problèmes, tout en conservant un caractère très général. Dans un premier temps nous allons décrire le comportement d'une particule chargée dans un champ magnétique, puis nous allons voir dans quel cadre d'approximation un plasma neutre constitué a priori de trois entités chimiques différentes vérifie l'approximation hydrodynamique mono-fluide et suit une relation du type loi d'Ohm. Dans le texte, les grandeurs physiques indexées par e et i feront respectivement référence aux électrons et aux ions. En outre, la valeur absolue de la charge électronique sera notée $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C.

2.2.1 Particules chargées en champ magnétique

La résolution des équations de la dynamique pour une particule de charge q , soumise à un champ magnétique \vec{B} , montre que la force de Lorentz, $\vec{f} = q \vec{v} \times \vec{B}$, lui impose un mouvement giratoire autour d'une ligne de champ, sans toutefois modifier son mouvement parallèle. Cette giration s'effectue avec une fréquence cyclotron — ou giromagnétique — donnée par $\bar{\Omega}_c = q \vec{B}/m$, où m est la masse de la particule. À cette fréquence, on associe le rayon de Larmor qui donne le rayon caractéristique du mouvement de giration d'une particule: $R_l = v_\perp/\Omega_c$; v_\perp est une vitesse caractéristique des particules — leur vitesse d'agitation thermique par exemple. Ceci montre de quelle façon les mouvements de la matière peuvent

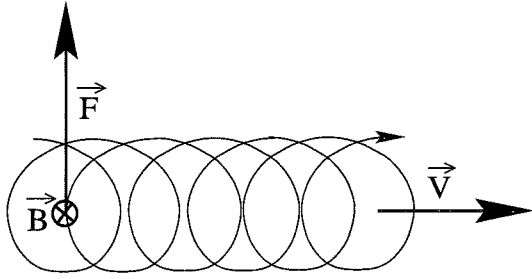


FIG. 2.1 – Dérive, avec une vitesse \vec{V} , du mouvement cyclotron d'une particule soumise à une force \vec{F} perpendiculaire à un champ magnétique \vec{B} .

être étroitement liés au champ magnétique.

Toutefois, comme le montre la figure 2.1, lorsque la particule est soumise à une force perpendiculaire à \vec{B} — cette force peut être d'origine gravitationnelle ou électrique — un mouvement de dérive à vitesse constante s'établit dans la direction perpendiculaire à la fois à \vec{B} et à cette force. Cette vitesse de dérive, $\vec{V} = \vec{F} \times \vec{B} / qB^2$, est dans le cas d'une force électrique indépendante de la masse de la particule considérée et sera donc la même pour des électrons et pour des protons (avec néanmoins des directions opposées) mais ce n'est plus le cas en champ de gravité. La combinaison de ces processus peut conduire à une perte d'efficacité du confinement magnétique et, bien que négligeables aux échelles astrophysiques, ils doivent être pris en considération dans les plasmas de laboratoire, en particulier dans le domaine de la fusion. Une courbure ou un gradient du champ magnétique conduisent également à des dérives similaires et peuvent donner lieu à des instabilités.

Il est intéressant de noter qu'en l'absence de force parallèle au champ magnétique et si nous négligeons les pertes dues au rayonnement gyromagnétique, l'énergie de la particule est conservée car ni la force de Lorentz, ni les forces de dérive (perpendiculaires au mouvement) ne travaillent. La champ magnétique ne peut donc être à l'origine de quelque mécanisme d'accélération de particule que ce soit ; pour cela, il faut faire intervenir une force qui lui est parallèle — généralement une force électrique.

2.2.2 Grandeurs caractéristiques de la MHD en astrophysique

Par définition, en MHD, le champ magnétique B_0 contrôle la dynamique de la matière conductrice — dont l'inertie se traduit par une densité ρ_0 . Un simple calcul dimensionnel sur l'équation du mouvement permet de relier les échelles spatiales de variations des grandeurs physiques L_0 , aux échelles de temps τ_0 . On détermine ainsi la vitesse d'Alfvén $V_A = B_0 / \sqrt{\mu \rho_0}$, où μ est la perméabilité magnétique du milieu ; cette vitesse est typique des processus MHD mis en jeu dans le plasma. En outre, une hypothèse fondamentale de la MHD est que l'approche classique — par opposition à l'approche relativiste — de l'étude de la dynamique reste valable ; cela sous-entend d'avoir $V_A/c \ll 1$, où $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière.

2.2.3 Électro-neutralité d'un plasma

Pour que la matière puisse créer ou modifier un champ magnétique, il faut qu'il y ait en son sein des circulations de charges et donc qu'elle ne soit pas électriquement neutre à l'échelle microscopique. C'est bien sûr le cas des plasmas que nous considérons, mais la description de leur comportement macroscopique par la MHD nécessite qu'ils puissent néanmoins être considérés comme neutres en moyenne locale.

Avant tout, il est important de préciser ici que l'échelle de temps pertinente en MHD est celle de la dynamique des ions ou plus généralement celle des baryons. Compte tenu du rapport entre les inerties des électrons et des baryons, le mouvement moyen du plasma sera dicté par celui de ces derniers, plus lourds. Les électrons, particules légères, vont tendre « spontanément » à se distribuer autour des ions. Ainsi sur les échelles de temps ioniques, environ deux mille fois plus grandes que les échelles de temps électroniques — suivant le rapport m_i/m_e — le gaz d'électrons est de ce point de vue quasistatique.

En outre, un calcul élémentaire montre que le champ électrique créé dans un plasma par toute particule chargée est naturellement écranté par l'agencement des particules chargées proches. Le potentiel effectif ainsi engendré prend la forme du potentiel de Yukawa :

$$\Phi(r) = \Phi_0(r) \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right),$$

où $\Phi_0(r)$ est le potentiel coulombien créé par la charge test seule. La décroissance du potentiel, donc de l'action d'une particule individuelle sur les autres, est caractérisée par la longueur de Debye, $\lambda_D = \bar{v}_e / \Omega_{pe}$. Dans cette relation, \bar{v}_e est la vitesse d'agitation thermique des électrons et $\Omega_{pe} = \sqrt{n_e e^2 / m_e \varepsilon_0}$ est la pulsation électronique du plasma, fréquence caractéristique des effets collectifs. De ce fait, si la longueur L_0 , typique du problème étudié, est beaucoup plus grande que λ_D alors le plasma à cette échelle peut être perçu comme électriquement neutre ; cela est vrai car sur les échelles de temps τ_e , les électrons, quasi statiques, s'organisent spontanément pour annuler la charge. Quelques longueurs de Debye astrophysiques typiques sont données dans le tableau 2.1 ; elles montrent que la neutralité électrique est toujours vérifiée dans les plasmas astrophysiques.

milieu	naines blanches	étoiles	couronne \odot	MIS	vent \odot
$\log \lambda_D$	-12	-9,5	0,5	2,5	3

TAB. 2.1 – Quelques longueurs de Debye, en centimètres, pour différents milieux astrophysiques.

2.2.4 Description mono-fluide d'un plasma

Dans un fluide, afin de pouvoir définir des grandeurs physiques, les particules doivent rester localisées. L'approximation fluide n'est donc valable que dans la mesure où les conditions thermodynamiques varient peu sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen —

trajectoire suivie par une particule sans être défléchie — pour des temps déterminés par l'agitation thermique ; les processus de délocalisation sont en fait responsables des phénomènes de transport. La description d'un plasma comme un seul fluide sous-entend que toutes les espèces chimiques sont suffisamment couplées pour être thermalisées et suivre une distribution de Maxwell unique. Ce couplage doit bien sûr s'opérer entre les éléments d'une même espèce chimique mais également entre chacune des populations. Ceci signifie évidemment que l'on renonce à décrire séparément le mouvement des électrons, des ions et des neutres. En hydrodynamique, dans des milieux suffisamment denses, l'approximation fluide est validée par des collisions qui transfèrent de la quantité de mouvement entre les particules de façon très efficace — via des interactions de type Van der Waals. En physique des plasmas ces collisions entre éléments neutres sont remplacées par des interactions coulombiennes (ou collisions coulombiennes) à plus grande distance ou par des processus collectifs.

Dans un premier temps, considérons un plasma complètement ionisé, sans élément neutre. En outre, nous nous intéressons plus particulièrement aux plasmas de Debye — c'est-à-dire à la majorité des plasmas astrophysiques — pour lesquels un grand nombre de particules remplit toute sphère de rayon λ_D (sphère de Debye). Nous avons vu précédemment que le rapport élevé entre l'inertie des ions et celle des électrons produit un très fort couplage électrostatique entre ces espèces. Ce couplage conduit à des processus collectifs, dont l'évolution se fait aux fréquences plasma Ω_e et Ω_i .

Pour ce qui est du couplage propre à chacune des espèces, nous savons que dans un plasma de Debye l'agitation thermique domine les interactions coulombiennes à l'échelle interparticulaire ; elles deviennent donc négligeables¹. Ces plasmas peu corrélés présentent l'intérêt de limiter les recombinaisons, ce qui augmente leur durée de vie. Pour chaque population, un couplage entre les particules, et donc une thermalisation, s'opère tout de même via des interactions coulombiennes sur des distances de l'ordre de la longueur de Debye. Mais la portée, grande devant d , sur laquelle ces interactions se passent, rend le couplage très inefficace pour relaxer les perturbations dans les distributions d'électrons et d'ions — c'est-à-dire pour dissiper les courants électriques ; les fréquences caractéristiques de relaxation des ions et des électrons, inverses des temps de collision τ_{coll} , sont donc très faibles en comparaison des fréquences plasma :

$$\frac{\nu_{e,i}}{\Omega_{e,i}} = \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \ll 1, \quad (2.1)$$

où, $\ln \Lambda$ est le logarithme coulombien avec $\Lambda = \lambda_D/r_l$. Les libres parcours moyens des particules (identiques pour les ions et les électrons) l_{coll} , c'est-à-dire les distances parcourues avant de subir une déflexion significative sont déduites de la relation (2.1) et des vitesses d'agitation thermique.

Pour que la thermalisation du plasma soit effective, il est donc nécessaire que les études fluides portent sur des échelles de longueur L_o , et de temps τ_o , vérifiant $L_o \gg l_{coll}$ et $\tau_o \gg \tau_{coll}$.

1. Le rayon de Landau du plasma, $r_l = e^2/kT$ est très petit devant la distance interparticulaire d .

Malgré leur grandeur, il peut s'avérer que les échelles astrophysiques ne soient pas suffisantes pour laisser relaxer les fonctions de distribution ionique et électronique et interdisent ainsi un traitement fluide du plasma. Néanmoins, lorsque les processus collisionnels ne sont pas assez efficaces, il existe toujours des mécanismes qui, en créant une résistivité anormale, conduisent à une réduction d'échelle. Cette plus grande rapidité de la relaxation peut être due à des effets de dérive en champ électrique perpendiculaire, à des interactions ondes-particules avec un champ électrique turbulent, etc.

Les propriétés de la relaxation des ions et des électrons changent considérablement lorsque le milieu n'est que partiellement ionisé. Un plasma faiblement ionisé va avoir une importante densité d'atomes neutres qui bien entendu ne sont pas sujets aux collisions coulombiennes. Ils vont induire dans le plasma une dynamique similaire à celle d'un gaz neutre mono-fluide. En effet, dans ce cas le couplage (le transfert d'impulsion) se fait de manière relativement efficace par l'intermédiaire des collisions ions et neutres. En outre, le plasma étant peu ionisé, les électrons sont froids et deviennent donc beaucoup plus sensibles aux interactions coulombiennes à courte distance (le rayon de Landau augmente). La conjugaison de ces différents mécanismes de collisions permet la thermalisation des diverses populations sur des temps maintenant extrêmement rapides.

Jusqu'ici, la description que nous avons faite du plasma et l'étude de la validité de l'approximation fluide sont a priori indépendantes de la présence ou non d'un champ magnétique. Celui-ci va en particulier introduire de nouvelles échelles dynamiques liées au mouvement cyclotron. La giration des particules chargées autour du champ magnétique assure un mécanisme de localisation de la matière qui vient compléter les processus collisionnels ; dans la direction perpendiculaire au champ magnétique les particules restent localisées sur des distances de l'ordre du rayon de Larmor. De manière plus générale, il faut obligatoirement considérer un problème MHD sur des échelles de temps et de distance beaucoup plus grandes que les échelles d'évolutions microscopiques typiques ; cela est particulièrement vrai pour les échelles liées aux oscillations cyclotrons des ions, sous peine de les voir se découpler de la population d'électrons. En MHD les grandeurs caractérisant un problème doivent donc vérifier $\tau_o \Omega_{ci} \gg 1$, ce que l'on peut encore écrire comme $L_o \gg R_o = V_A / \Omega_{ci}$.

Il est clair que la théorie MHD établie dans un tel cadre se contente de décrire un comportement moyen de la matière, mais elle ne va pas pouvoir rendre compte d'effets « extraordinaires », dus à une population de particules complètement découplées du corps de la fonction de distribution de leur espèce, telles que des électrons *run-away* ou des ions à très haute énergie.

Nous avons déjà remarqué qu'il peut sembler paradoxal d'assimiler un plasma à un fluide unique alors que par hypothèse il est parcouru par des courants $\vec{j} = n_e e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$. Mais, une estimation de l'écart de vitesse montre qu'il est très faible : $\|\vec{v}_i - \vec{v}_e\| \sim V_A / \Omega_{ci} L_o$, avec $J_o \sim B_o / \mu L_o$ puis en négligeant la masse des électrons devant celle des ions ; par conséquent, dans

des situations astrophysiques réalistes, ce courant ne permet pas de distinguer les ions des électrons d'un point de vue macroscopique. Un calcul en ordre de grandeur peut montrer que dans une zone convective externe du soleil, d'épaisseur $L_o \sim 2 \times 10^{10}$ cm et possédant une densité électronique moyenne $n_e \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$, d'importants champs magnétiques d'amplitude $B \sim 10^3$ G peuvent prendre naissance bien que la vitesse relative entre les ions et les électrons ne soit que de l'ordre de $\|\vec{v}_e - \vec{v}_i\| \sim 10^{-12} \text{ cm.s}^{-1}$.

2.3 Équations de la MHD

Nous allons montrer brièvement comment la MHD est construite sur la base des équations de l'hydrodynamique, auxquelles on joint les équations de Maxwell. L'ensemble des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm va se réduire à une équation d'induction décrivant les variations temporelles du champ magnétique. Le système ainsi constitué est fermé par une équation d'état de la matière.

2.3.1 Origine cinétique

Dans ce paragraphe nous allons établir les équations de l'hydrodynamique c'est-à-dire les équations reliant les variations temporelles de masse, d'impulsion, et d'énergie d'un élément infinitésimal de volume (ou élément fluide), à des termes d'advection, de perte et de source. Le cheminement qui permet de passer de la théorie cinétique décrivant le comportement statistique microscopique des particules composant le plasma, à une formulation macroscopique va être exposé succinctement (pour plus de détails on consultera, par exemple, Nicholson (1983)). Les relations obtenues ne tiennent bien entendu pas compte d'éventuelles créations ou annihilations de matière, ni même de modification des différentes populations par des réactions chimiques, nucléaires, d'ionisations ou de recombinaisons.

Pour retrouver de manière rigoureuse ce système d'équations il est intéressant de partir de la relation de Liouville qui décrit l'évolution d'une fonction de distribution² à N particules F , dans un espace de phases à $6N$ dimensions (données par les positions et impulsions de toutes les particules) ; chaque point (\vec{x}_k, \vec{p}_k) de cet espace, où k prend toutes les valeurs allant de 1 à N , décrit un état potentiel du système. Le théorème de Liouville montrant la conservation de la fonction de distribution au cours du déplacement s'exprime :

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_i} + \frac{d\vec{p}_i}{dt} \frac{\partial F}{\partial \vec{p}_i} = 0.$$

La résolution de cette équation est le seul moyen de déterminer l'évolution exacte de la distribution de particules ; cependant le nombre colossal de degrés de liberté rend cette résolution impossible dans des contextes réalistes et l'on doit se contenter de fonctions décrivant moins

2. F donne la probabilité de trouver les particules constituant le plasma dans un état donné.

finement l'état du plasma. La « réduction » se fait par intégration sur $(N - 1)$ variables d'espace et d'impulsion ; on obtient alors l'équation cinétique suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{\mathcal{F}} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{int}}, \quad (2.2)$$

portant sur la fonction de distribution à une particule définie par :

$$f(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) = N \int F d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N d\vec{p}_2 \dots d\vec{p}_N.$$

La fonction f donne le nombre de particules dans un volume élémentaire de l'espace des phases à 6 dimensions. Quant au terme $\vec{\mathcal{F}}$, il représente les champs de forces extérieurs dus à la gravité, au champ magnétique — sans oublier celui qui est créé par les courants circulant dans le plasma — puis au champ électrique :

$$\vec{\mathcal{F}} = m\vec{g} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

tandis que le second membre de l'équation (2.2) caractérise les interactions électrostatiques entre particules au sein même du plasma ; l'information perdue lors de la réduction de la fonction de distribution se retrouve partiellement dans ce terme de collision — ce terme dépend d'une fonction de distribution à deux particules dont l'évolution est à nouveau déterminée par une fonction de distribution à trois particules, etc³. Son traitement ne peut se faire sans hypothèse préalable sur les mécanismes d'interaction ; cela conduit en pratique à différentes formes d'équations cinétiques (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck, etc.).

Une hypothèse simplificatrice consiste à considérer différemment les interactions entre particules suivant qu'elles sont à longue ou à courte portée. Dans les plasmas dilués, possédant un grand nombre de particules dans la sphère de Debye, les processus collectifs sont dominants devant les processus interparticulaires ; les interactions à longue portée sont donc prépondérantes et peuvent être perçues comme étant créées par un champ moyen car elles ne dépendent que très faiblement de la position exacte des particules mises en jeu. Suivant le contexte on peut donc scinder les interactions internes en un terme lié à ces champs moyens (qui vont s'ajouter aux champs extérieurs) — équation de type Vlasov — et éventuellement un terme lié aux interactions entre particules voisines d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \left[m\vec{g} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \right] \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{int}}. \quad (2.3)$$

Les champs électromagnétiques ont ici deux contributions : celle des champs externes et celle des champs internes moyens, $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \langle \vec{E}_{\text{int}} \rangle$ et $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}} + \langle \vec{B}_{\text{int}} \rangle$.

3. On obtient finalement le système à N équations de Born-Bogoliougov-Green-Kirkwood-Yvon que l'on interrompt en appliquant une relation de fermeture.

2.3.2 Équations de l'hydrodynamique

Toutes les densités volumiques des grandeurs macroscopiques caractérisant le plasma sont déduites des différents moments sur les vitesses de la fonction de distribution à une particule ; les équations d'évolution de ces densités s'obtiennent donc en intégrant l'équation cinétique (2.3) sur l'espace à trois dimensions des vitesses d'une particule. Nous définissons la densité volumique d'une grandeur physique $\rho_\phi(\vec{x}, t)$ comme la moyenne de la quantité $\phi(\vec{p})$ (pondérée par la densité de particules) sur l'espace des phases :

$$\rho_\phi(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) \phi(\vec{p}) d^3\vec{p}.$$

D'après la relation (2.3) l'évolution de $\rho_\phi(\vec{x}, t)$ est dictée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_\phi(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \int \vec{v} f(\vec{x}, \vec{p}, t) \phi(\vec{p}) d^3\vec{p} - \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) \vec{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{p}} d^3\vec{p} = \mathcal{C}(\phi), \quad (2.4)$$

où l'on a supposé $\partial/\partial \vec{p} \cdot \vec{\mathcal{F}} = 0$, ce qui est toujours vérifié même pour la force $q\vec{v} \times \vec{B}$. Munis de cet outil, nous pouvons maintenant établir les équations d'évolution des différentes espèces chimiques du plasma, que nous notons α , dans lesquelles vont intervenir des grandeurs physiques partielles.

Équation de continuité : Elle décrit l'évolution de la densité numérique de particules. On l'obtient en posant $\phi \equiv 1$ dans l'équation (2.4) :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0.$$

La densité numérique de l'espèce α est définie par $n_\alpha(\vec{x}, t) = \int f_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3\vec{p}$, et sa vitesse macroscopique par $\vec{u}_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\vec{x}, t)} \int f_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) \vec{v} d^3\vec{p}$. Nous avons de plus considéré que pour des interactions élastiques $\mathcal{C}(1) = 0$ (conservation du nombre de particules).

Équation de transfert de quantité de mouvement : On calcule cette fois le premier moment de la fonction de distribution des particules α en posant $\phi \equiv \vec{p} = m_\alpha \vec{v}$ dans la relation (2.4). Ce calcul conduit à une généralisation de l'équation de Navier-Stokes :

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + \vec{g} \right) + \nabla \cdot \overline{\mathcal{P}}_\alpha - q_\alpha \left(\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B} \right) = -\nabla \cdot \overline{\Pi}_\alpha.$$

La combinaison des tenseurs $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\Pi}$ représente la pression totale du milieu ; ces termes sont d'origine respectivement thermique et collisionnelle. $\overline{\mathcal{P}}$ est le tenseur de pression cinétique — il ne doit son existence qu'à l'agitation thermique des particules — dont les composantes sont données par :

$$\mathcal{P}_{ij} = \int m(v_i - u_i)(v_j - u_j) f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3\vec{p}.$$

Il définit un flux de quantité de mouvement à travers une surface se déplaçant avec le flot ; il est par exemple à l'origine du transport visqueux (Landau & Lifchitz, Mécanique des fluides). De façon générale, ce tenseur s'écrit comme la combinaison d'un terme de pression hydrostatique P et de termes liés aux variations spatiales de la vitesse :

$$\mathcal{P}_{ij} = P\delta_{ij} - \tilde{\eta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\vec{u} \right) - \zeta\delta_{ij}\nabla\cdot\vec{u},$$

où $\tilde{\eta}$ et ζ sont respectivement les viscosités dynamique et « seconde » du milieu et δ_{ij} le symbole de Kroenecker.

La divergence du tenseur de pression interparticulaire représente la quantité de mouvement échangée par collision, non seulement avec les particules de la même espèce mais également avec l'ensemble des autres populations. Si on ne considère que des collisions élastiques entre les particules on peut approximer ce terme par :

$$\vec{\Pi}_\alpha \cong \sum_\beta n_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha\beta} (\vec{u}_\beta - \vec{u}_\alpha),$$

où $\nu_{\alpha\beta}$ est une moyenne de la fréquence des collisions entre les particules des espèces α et β .

Équation de transfert d'énergie : Afin de déterminer l'évolution de l'énergie cinétique totale — somme des énergies cinétiques interne et macroscopique — de la population α , on intègre (2.4) en posant $\phi \equiv p^2/2m_\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[n_\alpha m_\alpha \left(\frac{1}{2} u_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \right) \right] - n_\alpha \left(m_\alpha \vec{g} + q_\alpha \vec{E} \right) \cdot \vec{u}_\alpha \\ + \nabla \cdot \left[n_\alpha m_\alpha \left(\frac{1}{2} u_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \vec{\mathcal{P}}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] = \left| \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial t} \right|_{\text{coll}}, \end{aligned}$$

dans laquelle ε est la partie de l'énergie interne spécifique liée à l'agitation thermique des particules :

$$\varepsilon = \int (\vec{v} - \vec{u})^2 f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3\vec{p};$$

quant au vecteur \vec{q} , il exprime le flux de chaleur traversant le plasma :

$$\vec{q} = \int (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v} - \vec{u})^2 f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3\vec{p}.$$

Le membre de droite exprime les échanges d'énergie par collisions entre particules.

Pour rendre compte d'un plasma mono-fluide, l'étape suivante consiste à combiner les équations établies ci-dessus pour l'ensemble des espèces chimiques présentes dans le milieu. Si nous sommions ces équations, la densité numérique — puis par conséquent les densités de

masse ρ et de charge ρ^* — ainsi que l'énergie cinétique interne se déduisent directement des grandeurs partielles :

$$n = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \quad , \quad \rho = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \quad , \quad \rho^* = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}.$$

Il en va de même des grandeurs vectorielles et tensorielles comme la densité de courant, le flux de chaleur et la pression cinétique :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \quad , \quad \vec{q} = \sum_{\alpha} \vec{q}_{\alpha} \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{P}} = \sum_{\alpha} \bar{\mathcal{P}}_{\alpha}.$$

La définition de la vitesse est en revanche pondérée par l'inertie de chacune des espèces :

$$\vec{u} = \frac{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}};$$

cette expression de \vec{u} montre d'ailleurs que la vitesse d'ensemble du plasma est sensiblement la même que celle des éléments les plus lourds (ions ou neutres) dans le rapport m_e/m_i .

Les équations fluides décrivant l'évolution du plasma MHD se réduisent alors au système suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] + \nabla \cdot \bar{\mathcal{P}} = \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \vec{v} + \bar{\mathcal{P}} \cdot \vec{v} + \vec{q} \right] = \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho \vec{g} \cdot \vec{v}. \quad (2.8)$$

Ce calcul montre que dans le cas considéré ici de plasmas complètement ionisés, la différence de masse importante entre électrons et ions fait que ces derniers contrôlent totalement la dynamique du milieu. Compte de tenu de la neutralité locale, le champ électrique ne crée pas de force d'ensemble sur le plasma ; en revanche ce milieu, parcouru par des courants, est sujet à une force de Laplace — le champ magnétique possède éventuellement une composante d'origine externe, mais il contient également une composante liée aux courants moyens circulant dans le plasma. Les termes d'interactions à courte portée présents dans les équations de la quantité de mouvement et de l'énergie portant sur chaque espèce disparaissent. En effet, les collisions étant élastiques, les échanges de quantité de mouvement et d'énergie cinétique sont redistribués entre les différentes espèces, mais n'amènent pas de modification de la structure globale du plasma :

$$\sum_{\alpha} \vec{\Pi}_{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{coll}} = 0.$$

Le système des équations fluides présenté ci-dessus n'est pas fermé ; nous n'avons aucune connaissance de l'évolution du terme de flux de chaleur \vec{q} . Il faut donc introduire une relation

supplémentaire, en l'occurrence une équation d'état, pour relier l'énergie interne spécifique aux autres grandeurs physiques, ainsi qu'une loi définissant le flux de chaleur — telle que la loi phénoménologique de Fourier, $\vec{q} \propto -\nabla T$. Dans la suite du manuscrit, nous supposerons un « gaz parfait » vérifiant $P = n k T^4$, puis nous postulerons une équation d'état polytropique de la forme :

$$P \rho^{-\gamma} = C^{\text{te}}, \quad (2.9)$$

où P est la pression hydrostatique et γ l'indice polytropique que nous prendrons égal à 5/3 dans le cas d'un plasma adiabatique ou à 1 pour un plasma isotherme. Pour conclure sur les traitements fluides de la MHD à travers les relations [2.5 - 2.8], il nous faut noter que nous n'avons absolument pas considéré le couplage d'une distribution de photons avec la matière. Nous passons donc outre tout effet de pression de radiation et de chauffage ou de refroidissement radiatif.

2.3.3 Loi d'Ohm généralisée

L'établissement d'une loi d'Ohm pour un plasma — c'est-à-dire d'une loi reliant les mouvements de la matière aux densités volumiques de courant \vec{j} , au champ électrique \vec{E} et au champ magnétique \vec{B} — est un point délicat à la base de la théorie MHD. Dans certains contextes il est en effet difficile de vérifier les conditions de validité de cette relation ; ainsi de mauvaises prédictions de la théorie peuvent parfois provenir d'une mauvaise évaluation de la forme de la loi d'Ohm, alors inadaptée au problème étudié. Cette loi traduit simplement, en terme de courant, la réponse d'un milieu conducteur immobile à un champ électrique. Elle prend la forme d'une relation de proportionnalité :

$$\vec{j}^* = \sigma \vec{E}^* \iff \vec{E}^* = \eta \vec{j}^*,$$

où σ est la conductivité électrique du plasma et η sa résistivité. Cette relation est exprimée dans le référentiel où le plasma est localement au repos ; pour la traduire dans le référentiel lié au laboratoire ou à l'observateur, nous appliquons une transformation de Lorentz sur le tenseur de Maxwell — qui décrit le champ électromagnétique. Dans l'approximation classique, valide pour la MHD, le champ électromagnétique devient $\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ et $\vec{B}^* = \vec{B}$. Ainsi la loi d'Ohm s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \iff \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j}. \quad (2.10)$$

Cette formulation de la loi d'Ohm, qui semble simple, cache en fait dans l'expression de la résistivité toute la micro-physique de la population d'électrons. Cette résistivité est dépendante du type de plasma rencontré. Cowling (1976) donne une description détaillée de la façon de formuler la loi d'Ohm et des approximations sous-jacentes, mais à titre d'exemple, on peut examiner la forme de cette relation pour un plasma chaud, complètement ionisé. Pour

4. $k = 1,38 \times 10^{-23}$ Joule.K⁻¹ est la constante de Boltzmann et T est la température du plasma.

cela nous partons de l'expression de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au gaz d'électrons, obtenue dans la section précédente. La dynamique importante dans ce contexte est celle des ions et comme nous l'avons vu précédemment les électrons sont alors dans une bonne approximation quasistatiques ; on peut donc considérer que la variation de leur impulsion moyenne est nulle. De plus nous approximations le tenseur de pression cinétique du gaz d'électrons au seul terme de pression hydrostatique. Une dernière approximation, due à la faible masse des électrons, consiste à négliger le terme de gravité devant les autres interactions mises en jeu. Compte tenu des hypothèses⁵ que nous venons d'émettre, on peut écrire :

$$-\nabla P_e - n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + n_e m_e \nu_{ei} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = 0.$$

Dans cette expression $\nu_{ei} = 1/\tau_{ei}$ est la fréquence des collisions responsables du transfert de quantité de mouvement entre les électrons et les ions. En introduisant la densité de courant $\vec{j} = n_e e (\vec{v}_e - \vec{v}_i)$ et si l'on assimile la vitesse du fluide à celle des ions⁶, cette relation peut encore s'écrire :

$$\eta \vec{j} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\nabla P_e}{n_e e} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{n_e e};$$

la résistivité du plasma est alors définie par :

$$\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}.$$

Dans le membre de droite de la formule précédente apparaissent deux termes de création de courant qui sont liés à des mécanismes associés de nouvelles formes de champs électriques. Un courant peut être produit d'une part à travers le gradient de la pression du gaz d'électrons et peut être d'autre part généré par un effet Hall. Il est important de regarder précisément dans quelles approximations il est possible de négliger ces deux termes indésirables. Pour cela, nous allons successivement les comparer au terme $\|\vec{v} \times \vec{B}\|$, caractéristique de la MHD.

– Importance de l'effet Hall :

$$\frac{\|\vec{j} \times \vec{B}\|}{n_e e \|\vec{v} \times \vec{B}\|} \sim \frac{R_0 V_A}{L_0 V_o} \ll 1.$$

On remarque de nouveau que la MHD nécessite d'avoir $L_0 \gg R_0$ mais il faut de plus que le plasma ne soit pas statique afin de vérifier $V_A \sim V_o = L_0/\tau_o \neq 0$. Sinon, pour tout de même appliquer la MHD il faut vérifier $\eta \vec{j} \gg \|\vec{j} \times \vec{B}\|/n_e e$, ce qui n'est vrai que pour une condition très restrictive sur les temps de collisions électrons-ions : $\nu_{ei} \gg \Omega_{ce}$.

– Importance du gradient de pression électronique :

$$\frac{\|\nabla P_e\|}{n_e e \|\vec{v} \times \vec{B}\|} \sim \frac{R_0 C_S^2}{L_0 V_o V_A} \ll 1,$$

où C_S est la vitesse du son dans le plasma. Cette relation conduit clairement aux mêmes approximations que la précédente.

5. Ce calcul revient à effectuer la différence des équations du mouvement des populations d'ions et d'électrons, puis à considérer des courants stationnaires.

6. $\vec{v} \sim \vec{v}_i + \frac{m_e}{m_i} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$

Ces calculs en ordre de grandeur montrent qu'il est fondamental que le plasma soit en mouvement pour avoir le droit de calculer le champ électrique à partir de la loi d'Ohm simple donnée par la relation (2.10). Un autre point important concernant le gradient de pression électronique est le rôle qu'il peut jouer dans la direction parallèle au champ magnétique ; un gradient dans cette direction génère une force électrique qui ne peut être compensée par le magnétisme. Cette propriété donne dans certains cas un moyen efficace d'accélération de particules.

Si contrairement au cas étudié ci-dessus, nous avons considéré un plasma froid, possédant une population non négligeable d'atomes neutres, il serait apparu dans l'expression de la loi d'Ohm un terme supplémentaire lié à la diffusion sous l'effet de la force de Laplace des espèces chargées par rapport aux neutres. Le courant de charges ainsi induit est dirigé perpendiculairement aux lignes de champ et est proportionnel au carré du champ magnétique. Il faut bien voir que cette diffusion, dite diffusion ambipolaire n'enlève rien au couplage existant entre les particules, et que par conséquent elle ne va pas à l'encontre du comportement mono-fluide du plasma.

2.3.4 Équations de Maxwell

L'ensemble des équations fluides montre comment vont évoluer les grandeurs physiques caractérisant un plasma sous l'action d'éventuels champs de forces extérieurs mais surtout à travers des effets collectifs moyennés sur les échelles de temps et d'espace MHD. Ces effets collectifs — dus aux fluctuations des interactions à longue portée — sont relaxés dans l'approximation MHD mais nous en gardons trace par des champs électrique et magnétique moyens. Nous allons donc voir à présent comment évoluent ces champs électromagnétiques \vec{E} et \vec{B} . Cette évolution se décrit naturellement par les quatre équations de Maxwell que nous exprimons dans le système MKSA :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho^*}{\varepsilon_0}, \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

auxquelles on ajoute la loi d'Ohm (2.10) qui découle du caractère quasistatique des électrons.

Le diamagnétisme des milieux dilués que sont les plasmas est très faible, on peut donc se permettre d'approximer la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique à celles du vide $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ et $\mu \simeq \mu_0$ avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Dans un premier temps nous pouvons vérifier simplement que l'électro-neutralité du plasma découle de façon naturelle des hypothèses qui fondent la MHD : un calcul en ordre de

grandeur sur la relation de Gauss (2.11) montre que le rapport de la densité numérique de particules participant à la charge du plasma sur la densité de particules totale est très petit : $n^*/n = V_A^2/(c^2\tau_o\Omega_{ci}) \ll 1$, car par hypothèse la MHD repose sur les relations d'échelle $V_A \ll c$ et $\tau_o\Omega_{ci} \gg 1$.

De la même manière, la loi de Faraday (2.13) nous donne une relation approximative entre les valeurs de champs électrique et magnétique :

$$\frac{B_o}{\tau_o} \sim \frac{E_o}{L_o} \Rightarrow E_o \sim V_A B_o,$$

si nous considérons des grandeurs typiques du milieu étudié. En reportant cette relation dans l'équation de d'Ampère (2.14) :

$$B_o \sim \mu_o J_o + \frac{V_A^2}{c^2} B_o,$$

on constate immédiatement que le courant de déplacement est largement négligeable devant les autres termes, dans le cadre non relativiste d'application de la MHD. Pour les plasmas MHD la relation d'Ampère se réduit donc simplement à l'expression :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}, \quad (2.15)$$

en accord avec la relation (2.6) découlant de la neutralité du plasma, qui requiert un courant à divergence nulle c'est-à-dire un courant circulant sur des boucles fermées sans accumulation de charges.

2.3.5 Équation d'induction

La combinaison des équations de Maxwell (2.12), (2.13), (2.15) avec la loi d'Ohm (2.10) permet d'établir une autre relation fondamentale de la MHD qui vient compléter les équations décrivant l'évolution du fluide. Cette équation, appelée équation d'induction, s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nu_m \Delta \vec{B}. \quad (2.16)$$

Elle exprime l'évolution du champ magnétique à travers son couplage avec la matière et par l'action d'effets dissipatifs. Les deux termes du membre de droite sont de nature différente : le premier est associé à un mouvement d'advection des lignes de champ avec le flot de plasma alors que le second montre un effet de dissipation du courant électrique qui se traduit par la diffusion des lignes de champ magnétique. En effet, dans la limite où l'advection du champ est négligeable devant sa dissipation, l'équation d'induction se résume à une simple équation de diffusion :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nu_m \Delta \vec{B}.$$

Cependant, nous avons montré que les plasmas MHD ne peuvent être dominés par la dissipation car alors l'expression de la loi d'Ohm (2.10) n'est plus valable ; l'effet Hall et le gradient de pression électronique deviennent dans ce cas prépondérants. La diffusivité magnétique que

nous avons ici supposée uniforme, $\nu_m = \eta/\mu_o$, est proportionnelle à la résistivité du plasma. Elle a un effet dissipatif — analogue à celui de la viscosité hydrodynamique — qui tend à uniformiser le champ magnétique et donc à éliminer les courants — cela s'accompagne d'une production d'énergie interne par effet Joule.

Il est intéressant d'avoir une idée de l'importance relative des termes d'advection et de diffusion ; nous faisons cette estimation à travers leur rapport :

$$\left\| \frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\nu_m \Delta \vec{B}} \right\| \sim \frac{V_o L_o}{\nu_m}.$$

On peut donc dans le cadre de la MHD construire un nombre sans dimension dont la valeur, suivant qu'elle est petite ou grande devant l'unité, indique si le plasma se comporte plutôt en régime advectif ou diffusif. Ce nombre est appelé nombre de Reynolds magnétique et est défini comme,

$$\mathcal{R}_m = \frac{V_o L_o}{\nu_m}. \quad (2.17)$$

Il est l'analogue du nombre de Reynolds hydrodynamique utilisé pour déterminer si un fluide est en régime turbulent ou non.

2.3.6 Force de Laplace

Lorsque que l'on établit les équations fluides qui gouvernent la dynamique d'un plasma, la force de Laplace volumique $\vec{f}_l = \vec{j} \times \vec{B}$ apparaît naturellement compte tenu du léger décalage de vitesse entre les ions et les électrons. Nous pouvons y introduire la forme (2.15) de la relation d'Ampère, négligeant le courant de déplacement ; elle devient ainsi $\vec{f}_l = \nabla \cdot \vec{B} \times \vec{B} / \mu_o$, puis après quelques manipulations algébriques élémentaires se met sous la forme :

$$\vec{f}_l = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_o} \right) + \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} \cdot \nabla \right) \vec{B}. \quad (2.18)$$

Cette écriture artificielle de la force de Laplace présente l'avantage d'aider à sa compréhension physique. Par analogie avec la force volumique créée par la pression thermique, on identifie le premier terme de (2.18) à la force exercée par une pression magnétique définie par :

$$P_m = \frac{B^2}{2\mu_o}.$$

Une surpression magnétique a donc sur la matière exactement la même influence qu'une surpression thermique. Le second terme est appelé tension magnétique, il tend à s'opposer à la courbure des lignes de champ magnétique de façon identique à la tension mécanique s'exerçant sur une corde ; en toute logique son amplitude est inversement proportionnelle au rayon de courbure. En outre, comme nous le verrons dans le chapitre 2.3 la tension magnétique joue le

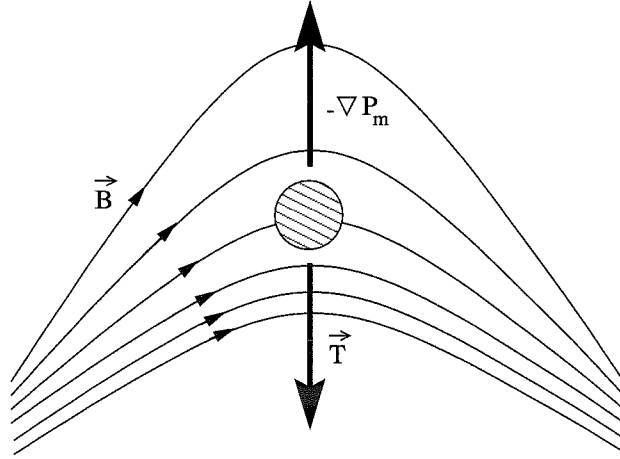


FIG. 2.2 – Schéma montrant la décomposition de la force de Laplace en force pression et de tension, \vec{T} .

rôle de force de rappel dans la propagation des ondes MHD — et plus particulièrement pour l'onde d'Alfvén, analogue d'une onde se propageant sur une corde vibrante. Bien évidemment ces deux « sous-produits » de la force de Laplace se compensent exactement afin d'exercer une action nulle suivant les lignes de champ magnétique. Sur la figure 2.2, nous avons représenté l'effet de ces contributions de la force de Laplace sur un volume élémentaire de plasma. Il est également intéressant de remarquer que la force de Laplace s'écrit comme la divergence d'un tenseur

$$\vec{f}_l = \nabla \cdot \left(-P_m \bar{I} + \frac{\overline{BB}}{\mu_0} \right),$$

où \bar{I} est le tenseur unité et $\overline{BB}_{ij} = B_i B_j$ est défini par le produit tensoriel de \vec{B} avec lui-même. Cette approche permet une écriture conservative de l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot \left(\rho \vec{v} \vec{v} + \overline{P} + P_m \bar{I} - \frac{\overline{BB}}{\mu_0} \right) = 0, \quad (2.19)$$

où $\vec{v} \vec{v}_{ij} = v_i v_j$ et \overline{P} est le tenseur de pression cinétique.

2.3.7 Bilan énergétique

Dans le plasma, la force de Lorentz s'exerçant sur les particules en mouvement travaille à travers l'action du champ électrique — et seulement lui. Comme nous pouvons le voir dans l'équation d'énergie (2.8), cette force échange sous différentes formes de la puissance électromagnétique avec la matière. Cette puissance s'évalue simplement et s'exprime :

$$\Sigma = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (2.20)$$

La combinaison des équations de Faraday (2.13) et d'Ampère (2.15) permet après quelques opérations algébriques de récrire Σ comme :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = \Sigma; \quad (2.21)$$

cette équation détermine l'évolution de l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m = B^2/2\mu_0$. Elle comprend un terme de transport d'énergie électromagnétique donné par la divergence du flux de Poynting, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ et le terme de perte Σ . Il est remarquable qu'en MHD l'intégralité de l'énergie électromagnétique se retrouve dans le champ magnétique; cela découle simplement du lien entre les valeurs caractéristiques de \vec{E} et \vec{B} — $E_0 = V_A B_0$ — qui conduit à avoir une énergie électrique $\mathcal{E}_e = \varepsilon_0 E^2/2$ négligeable :

$$\mathcal{E}_e = \frac{V_A^2}{c^2} \mathcal{E}_m.$$

Dans la relation (2.20), si nous exprimons le champ électrique à partir de la loi d'Ohm, nous pouvons visualiser les origines de l'échange d'énergie magnétique; en effet Σ prend ainsi la forme :

$$\Sigma = -\eta j^2 - \vec{v} \cdot \vec{j} \times \vec{B},$$

dont le premier terme montre qu'une partie de la puissance électromagnétique est dissipée par effet Joule et chauffe donc le plasma, tandis que le second terme traduit les échanges d'énergie macroscopique entre la matière et le champ magnétique à travers la force de Laplace; cette force peut mettre en mouvement la matière et consommer du champ magnétique mais inversement, de part son advection, la matière peut déformer ou comprimer le champ magnétique qui voit ainsi s'accroître son énergie.

2.4 MHD idéale

En astrophysique de façon générale, l'importance des étendues spatiales sur lesquelles nous étudions les processus MHD fait que le nombre de Reynolds magnétique (2.17) est très grand devant l'unité. Cela signifie qu'à ces échelles la dynamique du milieu est régie par les mouvements de la matière et que les effets dissipatifs sont insignifiants; on parle alors de MHD idéale. L'équation d'induction (2.16) prend une nouvelle forme, dans laquelle nous sommes en droit de négliger la composante produisant la diffusion des lignes de champ à travers le plasma :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.22)$$

Un plasma répondant de la MHD idéale est assimilé à un milieu infiniment conducteur c'est-à-dire tel que $\eta = 0$. La loi d'Ohm devient alors :

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0},$$

et dans ce cas, la densité volumique de courant doit être calculée à partir de la relation d'Ampère (2.15).

Un théorème énoncé par H. Alfvén montre qu'à l'inverse du cas $R_m \ll 1$ où les lignes de champ magnétique peuvent diffuser à l'intérieur du plasma, dans le cadre de la MHD idéale les lignes de champ sont "gelées" dans la matière, c'est-à-dire qu'elles sont transportées par le

plasma et ont une évolution similaire à la sienne. En annexe nous avons établi une équation d'évolution lagrangienne (B.11) qui montre précisément ce couplage entre la matière et le champ magnétique.

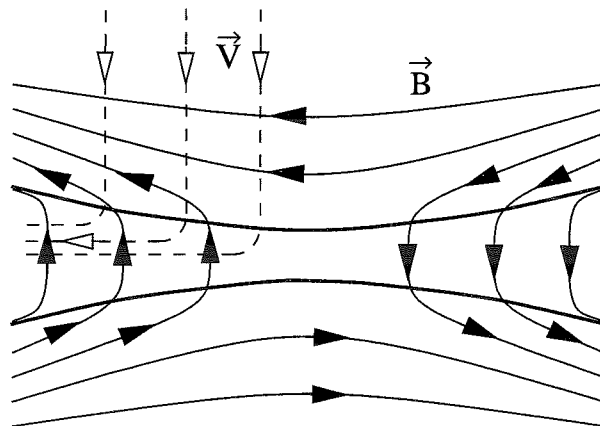


FIG. 2.3 – Site de reconnexion magnétique, configuration de Petschek.

Il existe cependant en astrophysique des contextes particuliers où la résistivité joue un rôle important et la MHD n'est plus idéale. Cela donne lieu à certaines formes d'instabilités ou à des phénomènes de reconnexion magnétique — par exemple liés aux *flares* dans la couronne solaire ou comme on le suppose dans la couronne des disques d'accrétion. Le processus de reconnexion est une bonne illustration de l'effet de gel et de dégel des lignes de champ. La figure (2.4) décrit comment en présence d'une juxtaposition de deux réseaux de lignes de champ circulant en sens inverse et poussés par la matière, il apparaît dans la zone intermédiaire le dégel de ces lignes de champ. En effet plus on se rapproche de la zone de transition, plus le rotationnel de \vec{B} et donc le courant sont importants. Le champ magnétique varie donc sensiblement sur des échelles de longueurs de plus en plus petites, diminuant ainsi le nombre de Reynolds ; la diffusion du champ conduit à la reconnexion de lignes de circulations opposées.

2.5 Système d'unités de Heaviside-Lorentz

Toutes les équations précédemment établies l'ont été de façon à ce qu'elles soient dimensionnellement cohérentes dans le système d'unité MKSA. Ce système est très commode pour formuler des relations mécaniques mais l'est moins pour traiter l'électromagnétisme. Évidemment, ce cadre dans lequel on tente d'exprimer la phénoménologie de la physique est purement subjectif ; il est dicté par l'aptitude à rendre les choses simples suivant le contexte dans lequel on se place. Aussi pour étudier l'effet des champs électromagnétiques sur la matière, plusieurs systèmes d'unités furent développés, et en particulier le système de Heaviside-Lorentz⁷.

Nous souhaitons décrire les équations de l'électromagnétisme dans ce système car il permet d'éliminer les constantes ϵ_0 et μ_0 des équations de la MHD ; cela présente un avantage

7. Les unités utilisées sont celles des systèmes c.g.s.

indéniable dans leur traitement par une approche numérique. Dans le système de Heaviside-Lorentz les équations de Maxwell et de la force de Lorentz deviennent (Jackson, 1975) :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho^*, \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}, \\
 \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \\
 \vec{f}_l &= q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Les équations du mouvement et d'énergie doivent bien entendu être réécrites en conséquence :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot \left(\rho \vec{v} \vec{v} + \overline{\mathcal{P}} + \frac{B^2}{2} \vec{I} - \overline{B B} \right) &= \rho \vec{g}, \\
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot \left(\rho e \vec{v} + \overline{\mathcal{P}} \cdot \vec{v} + \frac{B^2}{2} \vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \vec{B} \right) &= \rho \vec{g} \cdot \vec{v},
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

en introduisant la densité volumique d'énergie magnétique, $\mathcal{E}_m = B^2/2$, dans l'énergie spécifique totale, $e = (v^2/2 + \varepsilon + B^2/2\rho)$. Nous constatons que dans ce système B^2 a la dimension d'une énergie par unité de volume.

Chapitre 3

Déstabilisation des structures d'accrétion-éjection

Sommaire

3.1	Turbulence dans les disques	43
3.2	Développement d'instabilités de jet	45

3.1 Turbulence dans les disques

Notre intérêt pour la MHD provient du rôle majeur que cette théorie joue en astrophysique dans la description de la physique des objets sujets à des mécanismes d'accrétion et d'éjection de matière étroitement liés. Notre activité de recherche se situe dans le cadre des solutions obtenues par Ferreira (1997) pour des disques minces — donc quasi-kepleriens — optiquement épais et couplés à un champ magnétique. À partir de ces disques, de la matière s'échappe poussée par la force d'inertie décollant du lien entre ce plasma et les lignes de champ qui s'évasent dans un mouvement de rotation. Les solutions en régime stationnaire de Ferreira (1997) donnent les conditions physiques pour lesquelles une éjection de matière collimatée est consistante avec un processus d'accrétion. Cette approche est bien entendu très pertinente dans la mesure où les jets astrophysiques collimatés existent dans les NAGs sur des distances de l'ordre du Mpc, montrant ainsi une forme de stationnarité. Néanmoins, comme nous l'avons précédemment mentionné, bien que stationnaires à grande échelle les structures d'accrétion-éjection magnétiques doivent être turbulentes à petite échelle. En particulier, au sein même des disques nous avons vu que les processus de transport liés à la micro-physique ne sont absolument pas suffisants pour expliquer les taux d'accrétion qui doivent rendre compte des observations. Bien qu'ils doivent rester stables globalement, les disques sont nécessairement sujets à des instabilités locales. Dans une phase d'évolution non linéaire celles-ci vont produire une cascade d'énergie depuis des grandes échelles vers des petites échelles dont l'effet va se traduire par une dissipation effective d'énergie mécanique — on parle alors de viscosité

anormale — ou d'énergie magnétique — la turbulence produit ici une résistivité anormale. Dans les travaux qui présentent des solutions stationnaires de disques d'accrétion, toute cette phénoménologie se trouve cachée dans le paramètre α de l'approche proposée par Shakura & Sunyaev (1973). Cette prescription détermine la viscosité turbulente comme $\nu_T = \alpha C_S H$ où C_S est la vitesse du son et H l'échelle de stratification verticale du disque. Dans le cas de disques magnétisés, la vitesse d'Alfvén remplace celle du son.

Une étude très détaillée des instabilités, de la turbulence et du transport dans les disques d'accrétion a été effectuée par Balbus & Hawley (1998); dans ce chapitre nous nous contenterons d'une présentation sommaire de cette thématique.

3.1.1 Instabilité magnéto-rotationnelle

Les flots de Couette — colonne de fluide en mouvement de rotation différentielle — incompressibles sont linéairement instables et deviennent turbulents quand le critère de Rayleigh est vérifié: $d/dr(r^2\Omega) < 0$. Lorsque le moment angulaire de la matière décroît depuis l'axe de rotation vers la paroi extérieure de la colonne, la variation de la combinaison de la force d'inertie et de la force de Coriolis agissant sur un élément fluide perturbé linéairement ne tend pas à le ramener à sa position initiale mais au contraire à l'en éloigner.

Cependant, pour des plasmas subissant l'action de la force de Laplace, Velikhov (1959) et Chandrasekhar (1960) ont montré que, dans la limite d'un champ magnétique nul, le critère d'instabilité pour un plasma incompressible en rotation différentielle ne s'identifie plus avec le critère hydrodynamique de Rayleigh. En effet, compte tenu du couplage entre la matière et le champ magnétique, le milieu en rotation n'est plus instable lorsque le moment angulaire décroît vers l'extérieur, mais seulement lorsque la vitesse angulaire elle-même décroît radialement.

Balbus & Hawley (1991) ont étudié la possibilité de voir se développer linéairement cette instabilité propre aux plasmas MHD en rotation différentielle, de façon axisymétrique dans le cadre de disques d'accrétion. Puis, à travers diverses simulations bidimensionnelles, ils ont considéré son comportement non linéaire et non axisymétrique (Hawley & Balbus, 1991, 1992; Balbus & Hawley, 1992). Ces travaux ont permis de montrer que cette instabilité, dite magnéto-rotationnelle (notée MRI dans la suite), doit se développer rapidement dans les disques d'accrétion faiblement magnétisés. Le mode le plus instable voit son amplitude multipliée par cent durant une période de rotation de la matière; cependant, la longueur d'onde de ce mode instable ne peut excéder l'échelle de stratification verticale du plasma, ce qui limite l'amplitude du champ magnétique à des valeurs inférieures au champ d'équipartition ($\beta \geq 4$).

Ces résultats très prometteurs se voient confortés par les simulations tridimensionnelles qu'ont effectuées par la suite Hawley *et al.* (1995) puis Stone *et al.* (1996); ces auteurs ont ainsi prouvé l'efficacité de ce mécanisme pour rendre les disques turbulents et induire un transport effectif global. Par ailleurs, Brandenburg *et al.* (1995) puis Hawley *et al.* (1996) ont identifié le développement non linéaire tridimensionnel de l'instabilité MRI à un mécanisme dynamo c'est-à-dire un processus susceptible d'accroître l'amplitude du champ magnétique

des disques d'accrétion.

Ces différentes études ont permis de mieux comprendre le transport anormal dans les disques d'accrétion ; il reste néanmoins que l'instabilité MRI ne peut se développer que hors équipartition, lorsque le champ magnétique reste faible. Ceci pose un problème important avec une certaine catégorie de modèles de structures d'accrétion-éjection qui nécessite d'avoir $\beta \sim 1$ (Ferreira, 1997). Pour cette famille de modélisations, le point délicat du transport anormal persiste donc.

3.1.2 Instabilité de convection

Blaes & Balbus (1994) ont montré que, même dans les disques à faible fraction d'ionisation, le transport anormal du moment angulaire peut néanmoins découler du développement de l'instabilité magnéto-rotationnelle. Toutefois, dans les cœurs denses et froids des disques proto-stellaires les fractions d'ionisation peuvent demeurer suffisamment faibles pour que la matière et le champ magnétique soient découplés.

Cameron (1978) puis Lin & Papaloizou (1980) ont montré que, dans les disques d'accrétion optiquement épais, le rayonnement de la surface — et donc son refroidissement — peut conduire à violer le critère de Schwarzschild et ainsi donner lieu à des instabilités convectives. Les tourbillons de matière dus au fort gradient de température sont alors supposés être en mesure de produire une viscosité effective induisant en définitive un transport anormal. Cette phénoménologie est longtemps restée sous-jacente à la prescription α de la turbulence. Ce sont seulement les simulations tridimensionnelles de Stone & Balbus (1996) qui ont permis de véritablement caractériser la turbulence hydrodynamique et l'efficacité du transport induites par les mouvements de convection non linéaires de la matière. Ces travaux ont permis de conclure à l'inefficacité du transport associé à l'instabilité convective ; les coefficients α ainsi obtenus sont très faibles et extrêmement variables. Aucun flux net de moment angulaire n'a été mis en évidence ; en outre, les auteurs ont également montré qu'à travers ce mécanisme aucun transport ne peut se faire vers l'extérieur comme il se doit dans un processus d'accrétion.

3.2 Développement d'instabilités de jet

Outre les questions fondamentales sur les mécanismes de lancement ou de collimation des jets astrophysiques, auxquelles de récentes modélisations permettent partiellement de répondre (Casse & Ferreira, 2000; Ferreira, 1997), la stabilité de ces structures, qui se développent sur des échelles pouvant atteindre le Mpc, reste très mal comprise. La littérature ne donne aucune explication quant à la cause de l'inattendue stabilité globale de ces objets. Bien au contraire, les différentes études menées, tant sur le plan analytique que numérique (Bodo *et al.*, 1998, pour une étude tridimensionnelle), conduisent à penser que ces jets ne devraient pas survivre aux sollicitations du milieu ambiant, notamment via le développement

des instabilités de Kelvin-Helmholtz. Tout porte à penser que, pour des raisons encore obscures, l'instabilité des jets conduit à de la turbulence — produisant un chauffage puis un rayonnement — et à leur réorganisation plutôt qu'à leur destruction.

3.2.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

Le développement des modes de Kelvin-Helmholtz est le processus instable le plus étudié dans le cadre de la physique des jets. Cette instabilité est apparue comme inévitable dans les premières modélisations, simplement hydrodynamiques, de ces objets; par la suite, dans les modélisations de jets magnétisés, elle est restée au cœur de l'activité de recherche sur leur stabilité. En outre, les travaux menés en astrophysique sur ce sujet ont pu se reposer sur les nombreuses études effectuées auparavant sur ce mécanisme dans divers domaines de la physique.

L'instabilité de Kelvin-Helmholtz se développe lorsque deux fluides sont en mouvement relatif de part et d'autre d'une frontière commune — telle que la surface séparant l'eau de mer de l'air transporté par un vent, formant ainsi des vagues. L'origine physique de l'instabilité apparaît à travers une étude de l'équation de Bernoulli; en effet, lorsqu'une oscillation se forme à l'interface entre les deux fluides, l'équilibre des pressions est modifié et conduit à accroître l'oscillation. L'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui de façon générale se développe dans un milieu présentant un fort gradient de vitesse, s'accompagne donc d'un transfert — ou mélange — de matière à travers la frontière.

Dans les jets, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz donne naissance à deux familles de modes. D'une part apparaissent les modes de surface ordinaires, confinés dans la région où le gradient de vitesse entre le milieu ambiant et le jet de matière est le plus important; d'autre part, lorsque la vitesse du fluide excède la vitesse des ondes magnéto-soniques rapides, des modes dits « réfléchis », se développant dans le volume du jet, deviennent dominants. Le travail de Birkinshaw (1990), en particulier, donne une vision générale de l'état des connaissances théoriques sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans le cadre des jets astrophysiques. D'un point de vue numérique, le problème a également été largement abordé. Compte tenu du manque de connaissances précises sur les grandeurs physiques caractéristiques des jets, les simulations numériques ont tenté de couvrir un espace de paramètres aussi large que possible, particulièrement quant au choix du nombre de Mach¹ du jet ou du rapport de sa densité avec celle du milieu ambiant. Par exemple, Hardee & Clarke (1992) puis Hardee *et al.* (1995) ont simulé en trois dimensions la propagation d'un flot de matière peu dense pour différents nombres de Mach, tandis que Bodo *et al.* (1994, 1995) et Bodo *et al.* (1998) se sont plutôt concentrés sur l'évolution temporelle du jet dans des simulations bidimensionnelles puis tridimensionnelles. L'ensemble de ces études, qui présente le développement d'instabilités de Kelvin-Helmholtz dans diverses configurations de jet, montre surtout l'importance d'un traitement adéquat du

1. Rapport de la vitesse de la matière sur de celle des ondes physiquement pertinentes, typiquement $M = V/C_S$ ou $M_a = V/V_a$.

problème en trois dimensions car cela modifie considérablement le nombre des modes instables ainsi que la nature et la virulence de la turbulence qu'ils engendrent.

3.2.2 Instabilités MHD

La plupart des travaux portant sur la stabilité des jets en astrophysique concerne les modes de Kelvin-Helmoltz. Cependant, quelques auteurs ont également étudié des instabilités MHD pures — dont le développement provient de l'énergie puisée dans le champ magnétique. C'est le cas notamment des recherches menées sur les instabilités de courant, ou de kink, dans les jets par Appl & Camenzind (1992) pour des mouvements supermagnéto-soniques et par Appl (1996) pour des flots transmagnéto-soniques². La relation (A.18) montre que l'origine du mécanisme de ces instabilités réside dans la circulation du courant parallèle au champ magnétique j_{\parallel} . Au moins dans le cas de structures dites « force free », c'est-à-dire telles que le champ magnétique domine complètement leur dynamique, avec $|\vec{j} \times \vec{B}| = 0$, ces auteurs concluent à un effet négligeable des instabilités de courant vis-à-vis des modes de Kelvin-Helmoltz dont les taux de croissance restent toujours largement supérieurs. Ils montrent également que le courant ne peut avoir un effet déstabilisant que dans le cas de flots supermagnéto-soniques.

Des simulations numériques des instabilités de kink ont également été effectuées par Appl *et al.* (2000) dans une phase linéaire et par Lery *et al.* (2000) dans une phase non linéaire. Elles montrent que le développement non linéaire des modes de courant ne conduit pas à la destruction du jet mais à une réorganisation de sa structure magnétique, avec l'apparition de couches de courant et d'une structure en hélice. En outre, les auteurs démontrent l'intérêt de leur étude en deux temps car les modes linéaires les plus instables le sont également non linéairement.

Quant aux instabilités de pressions, elles ont à ce jour été quasiment ignorées dans les études à la fois analytiques et numériques de jets. Seul Begelman (1998) redérive de façon euristique les critères d'instabilité des modes d'interchange $m = 0$ et $m = 1$, connus par ailleurs dans la littérature (Freidberg, 1987), pour conclure que les jets y sont très certainement sensibles.

2. Flots dont la vitesse est superalfvénique mais reste sub-magnéto-sonique rapide.

Deuxième partie

Instabilités MHD de pression

Chapitre 1

Présentation des instabilités

Sommaire

1.1	Instabilités en MHD idéales	51
1.2	Instabilités de pression	52
1.3	Mécanismes physiques de l'interchange	55
1.4	Intérêt astrophysique	57

1.1 Instabilités en MHD idéales

Dans l'annexe A, nous présentons certaines techniques d'étude de stabilité ; en particulier, nous donnons les conclusions émanant du principe d'énergie appliqué à un système MHD. Celui-ci stipule qu'un plasma magnétisé, décrit dans l'approximation MHD, est stable lorsque le critère (A.14), impliquant les relations [A.15-A.17], est vérifié ; c'est-à-dire, lorsque, sous l'action d'une perturbation linéaire quelconque, la variation d'énergie potentielle du milieu reste positive. Indépendamment de l'action des frontières, nous voyons, à travers la relation (A.18), que deux mécanismes peuvent conduire à la déstabilisation du plasma, d'une part un processus lié aux courants parallèles, d'autre part un processus lié aux forces de pression — et donc aux courants perpendiculaires, compte tenu de l'équilibre entre les forces de pression et de Laplace.

Au cours de nos travaux nous ne nous sommes pas préoccupés de la première classe de mécanismes mentionnés, conduisant aux instabilités de courant ou modes de « kink ». Elles s'avèrent cependant jouer un rôle majeur, non seulement pour les plasmas MHD à géométrie toroïdale rencontrés dans les recherches sur la fusion contrôlée, mais aussi dans la dynamique des tubes de flux magnétique des atmosphères stellaires ; comme nous le mentionnons dans la section I-3.2 cette instabilité est également étudiée dans les jets astrophysiques.

Les modes de kink existent indépendamment de la pression ; en particulier, ils peuvent se développer dans la limite « force-free » où la dynamique du plasma est dominée par le champ magnétique, c'est-à-dire lorsqu'à l'ordre dominant de l'équilibre la force de Laplace

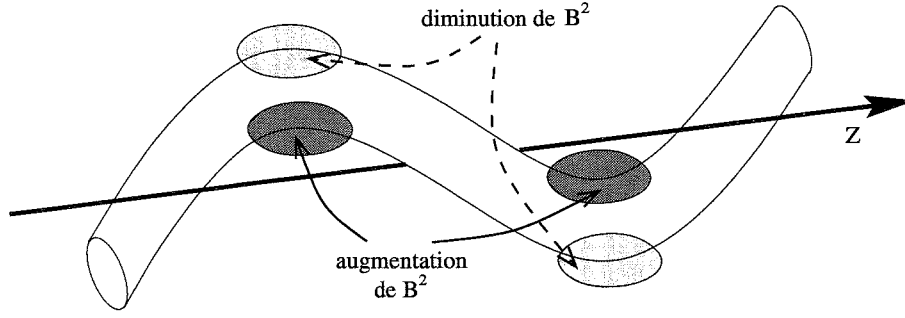


FIG. 1.1 – Développement du mode de kink instable, $m = 1$. Nous avons représenté les régions de surpression (foncée) et de dépression (claire) magnétique.

$\vec{f}_0 = \vec{j} \times \vec{B}_0$ est nulle. Leur taux de croissance est maximal pour les perturbations possédant des longueurs d'onde parallèles au champ magnétique, grandes devant les longueurs d'onde perpendiculaires, $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, tandis que ces dernières sont de l'ordre des échelles caractéristiques de l'équilibre, $k_{\perp} L_0 \sim 1$.

Sur la figure 1.1, nous représentons, dans une géométrie cylindrique, le mode de kink le plus instable, correspondant à $m = 1$ (m est le nombre d'onde azimutal) ; son taux de croissance important vient du fait, qu'étant donné le déplacement du centre de masse du cylindre, des effets d'entraînement inertiel s'ajoutent à l'instabilité de courant. Nous voyons que la déformation du tube de flux conduit à une asymétrie de la densité d'énergie magnétique créant des forces qui tendent à augmenter la déformation de la colonne ; bien entendu, le champ magnétique parallèle à l'axe du cylindre stabilise la structure par un effet de tension.

Pour une étude complète et détaillée des instabilités de kink, on consultera par exemple les ouvrages de Freidberg (1987) ; Bateman (1980), orientés vers la physique des Tokamaks ; Priest (1984) en fait également une étude, moins approfondie, appliquée à la physique solaire.

1.2 Instabilités de pression

1.2.1 Critère d'instabilité

La seconde classe d'instabilités MHD, au cœur de nos études, provient, comme on peut le constater dans l'expression (A.18), de la combinaison d'un gradient de pression thermique et d'un champ magnétique courbe — quel que soit le courant parallèle ; en effet, lorsque le produit scalaire du rayon de courbure magnétique $\vec{\kappa}_c$, avec le gradient de pression thermique est positif, les instabilités de pression peuvent potentiellement déstructurer le milieu :

$$\text{le critère d'énergie impose : } \begin{cases} \vec{\kappa}_c \cdot \nabla P_0 < 0 \Rightarrow \text{stabilisant,} \\ \vec{\kappa}_c \cdot \nabla P_0 > 0 \Rightarrow \text{déstabilisant.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Comme le montre la figure 1.2, lorsque la tension magnétique — déterminée par le rayon de courbure et l'amplitude du champ magnétique — participe au confinement du plasma,

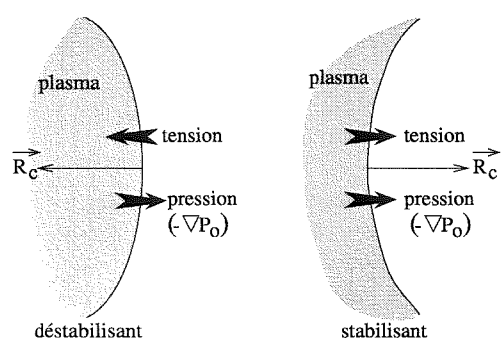


FIG. 1.2 – Structures magnétiques sujettes ou non aux instabilités de pression. On montre les combinaisons de forces de tension magnétique et de pression thermique — et donc les rayons de courbure et gradient de pression — conduisant à déstabiliser le plasma MHD ou non.

celui-ci est sujet aux instabilités de pression ; c'est évidemment le cas dans les tokamaks, mais, comme nous l'avons précisé dans la section I-1.1, c'est également le cas dans les jets astrophysiques.

L'étude de ces mécanismes instables, contrôlés par la pression et la courbure, montre que la forme des perturbations conduisant aux taux de croissance maximum diffère de celle rencontrée dans l'instabilité de kink ; il nous faut ici faire intervenir des variations rapides dans la direction transverse aux lignes de champ magnétique $k_{\perp} L_0 \gg 1$ — ce qui conduit donc à des modes localisés, tandis que les variations parallèles doivent à nouveau se développer sur des échelles plus grandes $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$, afin de s'affranchir des effets de courbure rapides et des forces de tension magnétique importantes associées.

1.2.2 Interchange

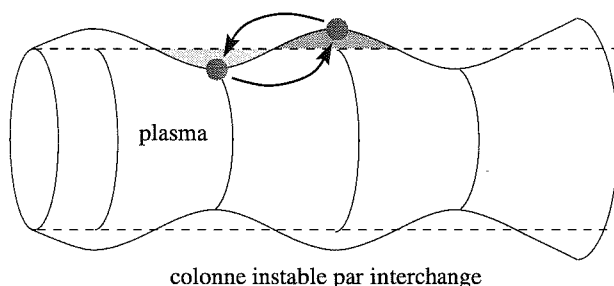


FIG. 1.3 – Développement d'un mode instable d'interchange. L'échange de tube de flux magnétique entre les régions claire et foncée s'accompagne d'une diminution de l'énergie potentielle de la colonne qui devient alors instable.

On distingue les modes de pression suivant que les perturbations conduisant à la déstabilisation varient ou non le long des lignes de champ magnétique. Les modes d'interchange sont ceux qui minimisent la courbure des lignes de champ magnétique au cours de leur développement.

Sur la figure 1.3 nous présentons le développement d'une instabilité d'interchange magnétique dans une colonne cylindrique, à travers le mode à symétrie azimutale $m = 0$ — il est également appelé « saucisse », compte tenu de la géométrie de la structure déformée ; le

développement de modes non axisymétriques donne plutôt au plasma une forme cylindrique cannelée.

Dans cette configuration, instable suivant le critère (1.1), la tension magnétique favorise le raccourcissement des lignes de champ vers l'intérieur, tandis que la pression thermique conduit au contraire à détendre ces mêmes lignes vers l'extérieur. D'après le critère d'énergie, la permutation de deux tubes de flux, provenant de rayons différents, est favorable à l'action de ces forces et diminue donc l'énergie potentielle du plasma MHD, le rendant ainsi instable.

1.2.3 Ballooning

Dans les plasmas dont l'équilibre est multidimensionnel, c'est-à-dire lorsqu'ils possèdent au plus une direction d'invariance (les équilibres présentés jusqu'ici sont 1D), les régions favorables ou défavorables aux instabilités de pression peuvent se succéder. Comme le montre

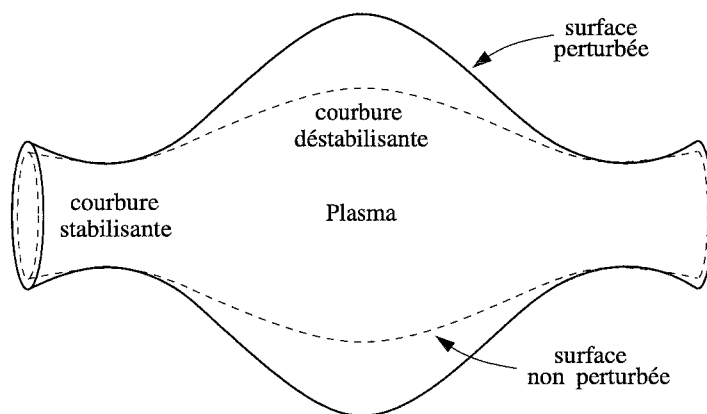


FIG. 1.4 – Développement d'un mode instable de ballooning. La structure magnétique cylindrique, montre des régions propices et non propices au développement des instabilités de pression.

la figure 1.4, les modes de pression instables, appelés dans ce cas modes de ballooning, vont alors se concentrer dans les régions où la courbure autorise leur développement et peuvent ainsi conduire à une situation plus instable qu'avec les simples modes d'interchange. En effet, un champ magnétique moyen peut être globalement défavorable aux instabilités de pression — c'est-à-dire aux modes d'interchange — mais peut néanmoins conduire aux instabilités localisées de ballooning.

Dans le domaine de la fusion, ces modes de ballooning sont extrêmement contraignants car ils limitent drastiquement l'efficacité du confinement magnétique ; en effet, ils fixent la valeur critique de la pression thermique au delà de laquelle ils déstructurent le champ magnétique et lissent les gradients de pression — en pratique cela se traduit par une valeur critique, maximale, du β -plasma défini par le rapport de la pression thermique sur la pression magnétique, soit grossièrement le rapport des énergies.

Cette instabilité conduit, de façon éruptive, à un gonflement puis un déchirement de la structure magnétique; son caractère local fait de ce processus un très bon candidat à la génération de turbulence, ce qui se vérifie effectivement par des profils de température en « dents de scie » dans les tokamaks.

1.2.4 Cisaillement magnétique

Les modes d'interchange comme ceux de ballooning peuvent être stabilisé par la présence d'un cisaillement du champ magnétique. Cela signifie que deux tubes de flux voisins ne sont pas forcément parallèles et que, par conséquent, leur interchange s'accompagne d'une déformation des lignes de champs — et donc d'une stabilisation par tension.

Cette propriété se retrouve dans le critère nécessaire de stabilité de Suydam (1958), pour une colonne cylindrique 1D :

$$\frac{B_{\phi}^2}{r\mu_0} S^2 + 8 \frac{dP_0}{dr} > 0, \quad (1.2)$$

où $S = d \ln q / d \ln r$ représente le cisaillement du champ magnétique, avec $q = r B_{\phi z} / 2\pi h B_{\theta}$ le « paramètre de sécurité » des tokamaks, r le rayon et h la hauteur du cylindre. L'expression montre le caractère déstabilisant de la force de pression thermique, tandis que le cisaillement S du champ magnétique, quadratique, est stabilisant par la tension qu'il provoque durant l'interchange.

Cependant ce critère ne donne pas une condition suffisante de stabilité; en particulier, nous allons montrer dans la suite que, suivant son signe, le cisaillement peut contribuer à la déstabilisation par interchange.

1.3 Mécanismes physiques de l'interchange

1.3.1 Sans champ magnétique

Le phénomène le plus élémentaire d'interchange que l'on puisse rencontrer dans la nature donne lieu à l'instabilité de Rayleigh-Taylor : une composante dense de fluide, placée au dessus d'une composante plus ténue, est instable en présence d'un champ de gravité dirigé vers la bas; l'interchange incompressible de deux éléments fluides, l'un dense, l'autre non, s'accompagne d'une diminution de l'énergie potentielle gravitationnelle du milieu, qui est par conséquent instable.

Il n'est cependant pas nécessaire que le profil de densité soit croissant avec l'altitude pour que le milieu soit instable. Le critère de Schwarzschild montre qu'un milieu stratifié par un champ de gravité est instable vis-à-vis de la convection — qui est une forme d'interchange — lorsque le gradient de température du fluide est inférieur au gradient adiabatique. C'est-à-dire lorsque la fréquence de Brunt-Väisälä N , caractéristique des ondes de gravité devient négative :

$$N^2 \equiv \frac{g}{\gamma} \frac{d}{dz} \ln (P_0 \rho_0^{-\gamma}) = -g \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{g}{C_S^2} \right) < 0,$$

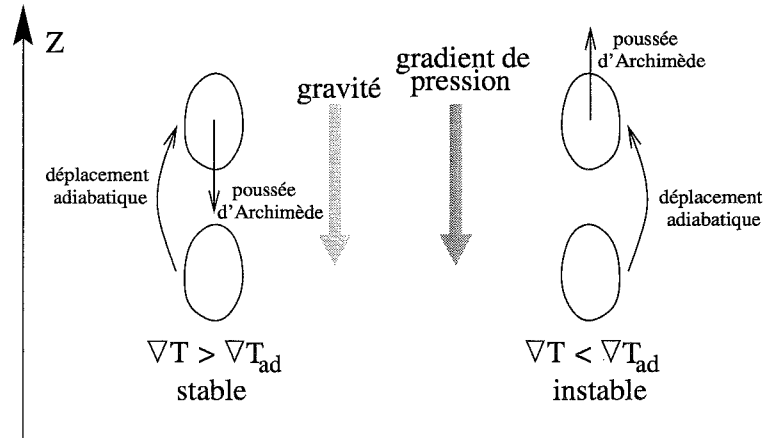


FIG. 1.5 – Déplacement adiabatique d'un élément fluide conduisant, dans un milieu stratifié par la gravité, à un mouvement de convection lorsque le critère de Schwarzschild n'est pas vérifié.

où g est la gravité, C_S^2 la vitesse du son et C_S^2/g l'échelle caractéristique de stratification. Ce processus instable est décrit sur la figure 1.5 ; lorsque l'on déplace un élément fluide de façon adiabatique, suivant la densité du milieu environnant à sa position perturbée, il va subir une poussée d'Archimède stabilisante ou déstabilisante.

1.3.2 En champ magnétique

En présence de champ magnétique les processus de convection ont bien entendu toujours lieu, mais à présent le déplacement de la matière s'accompagne de celui de tubes de flux (on considère ici des déplacements de matière principalement perpendiculaires aux lignes de champ). Par des arguments simples de conservation de masse et de flux magnétique, on démontre que la compression — ou la détente — transversale d'un tube de flux, d'une longueur donnée, maintient le rapport B/ρ constant ; c'est ce que nous montre également la relation (B.11).

On montre aisément qu'un champ magnétique uniforme stabilise un plasma stratifié, sans introduire de tension magnétique. En revanche, lorsque ce champ magnétique participe, au même titre que la pression thermique, à soutenir le plasma (i.e. s'oppose au confinement), il peut au contraire déstabiliser le milieu. Acheson (1979) étudie l'instabilité de convection magnétique dans de multiples configurations ; il donne en particulier le critère d'instabilité suivant :

$$-\frac{d}{dz} \ln \left(\frac{B_o}{\rho_o} \right) > \gamma \frac{N^2}{g} \frac{C_S^2}{V_A^2}.$$

Le terme de gauche montre l'influence déstabilisante du profil de champ magnétique lorsqu'il décroît suffisamment rapidement ; tandis que le membre de droite représente le terme de convection déjà rencontré.

Ces instabilités d'interchange se développent lorsqu'il n'y a pas de mouvement de

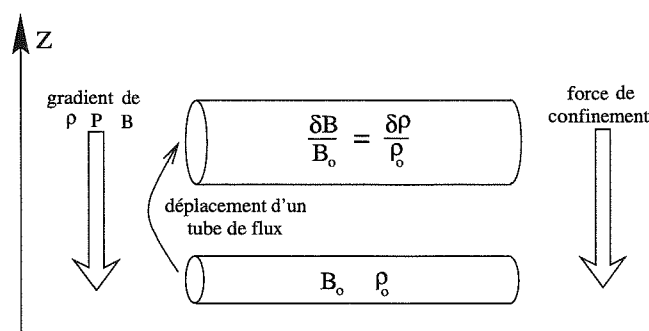


FIG. 1.6 – *Déplacement d'un tube de flux magnétique dans un plasma confiné. Cette situation peut conduire à de l'interchange, que le confinement soit produit par la gravité ou par de la tension magnétique.*

matière le long des lignes de champs magnétique. Cependant, Parker (1966) met en évidence un mode particulier, plus instable que les premiers, dont le développement s'accompagne d'une courbure du champ magnétique qui, compte tenu de la gravitation, induit un glissement du plasma suivant les lignes ; ce faisant, la matière qui s'écoule libère le tube de flux de son poids ce qui facilite son élévation dans le milieu stratifié. Cette instabilité permet d'évacuer du flux magnétique tout en créant des surdensités localisées.

Nous avons présenté la phénoménologie de ces modes car, lorsque la tension magnétique remplace la gravité pour confiner le plasma (i.e. s'oppose aux forces de pression thermique et magnétique), les modes de pression d'interchange et de ballooning, que nous avons mentionné dans la section 1.2, présentent des comportements similaires avec respectivement, les modes d'interchange et ondulatoire de l'instabilité de Parker. Néanmoins, la compréhension des mécanismes des instabilités de pression est plus difficile à cerner que pour celles de Parker ; en effet, le moteur de l'instabilité ne provient pas d'un champ de force extérieur (la gravité), mais est uniquement lié à l'équilibre entre la pression totale et la tension magnétique, ce qui introduit des couplages supplémentaires.

1.4 Intérêt astrophysique

Nous nous intéressons aux instabilités de pression, en particulier à celles de ballooning, car nous souhaitons savoir si leur virulence dans les tokamaks se retrouve en astrophysique.

D'une part, nous allons nous intéresser aux instabilités de pression comme un mécanisme capable de rendre le cœur des jets instable, pour, d'une part, y déposer l'énergie qu'ils vont ensuite rayonner — elles constituent un processus pertinent pour constituer, via de la turbulence, une source de chauffage des plasmas de paires électron-positron dans les modèles à deux fluides (Henri & Pelletier, 1991) — d'autre part, le mode de ballooning se développe de façon explosive et il est intéressant d'évaluer si de tels ébranlements peuvent conduire à la création des nœuds associés aux sur-luminosités de jets.

En outre, le ballooning peut jouer un rôle majeur dans les disques d'accrétions, tels que ceux des microquasars galactiques, qui présentent des caractères éruptifs.

Nous souhaiterions de plus savoir si le ballooning peut conduire à de la turbulence dans les disques et le cas échéant, dans quel régime de β et avec quels coefficients de transport. Les structures magnétiques qui traversent les disques d'accrétion montrent des régions de courbure favorable et défavorable aux instabilités de pression ; par conséquent, nous pouvons espérer que ces configurations magnétiques à $\beta \sim 1$ sont effectivement sensibles au ballooning.

Chapitre 2

MHD linéaire dans un plasma homogène

Sommaire

2.1	Une formulation linéarisée de la MHD	60
2.2	Introduction du vecteur déplacement	62
2.3	Ondes MHD en milieu homogène	63

Il est possible de mener une étude de la stabilité linéaire d'un plasma magnétisé vis-à-vis du ballooning suivant plusieurs méthodes. Deux des méthodes les plus couramment utilisées pour ce type de problème sont le principe de minimisation de l'énergie et une recherche de la relation de dispersion des modes propres. Une description de ces moyens d'investigation est donnée dans l'annexe A de ce manuscrit.

Notre motivation pour l'étude du ballooning est bien sûr de savoir si cette instabilité permet ou non de produire une turbulence entretenue, voire de la reconnection magnétique, de façon localisée. Il est donc évident que notre cadre d'investigation nous pousse à faire une étude des modes propres du plasma en regardant plus particulièrement ceux de longueurs d'ondes petites devant les échelles spatiales caractéristiques du milieu. Nous avons préféré cette approche à l'application du Principe d'Énergie car d'une part, elle nous a semblé permettre une interprétation plus directe, d'autre part elle s'applique, que l'opérateur de force soit auto-adjoint ou non, ce qui n'est pas le cas du principe de minimisation de l'énergie potentielle.

Dans ce chapitre nous allons dériver l'équation de dispersion des ondes susceptibles de se propager dans un plasma MHD non homogène ; nous allons supposer la présence d'un gradient de pression thermique — et donc de densité — et un champ magnétique courbé. Évidemment, afin de pouvoir mener à bien un tel calcul nous serons amenés à émettre certaines hypothèses simplificatrices. Nous étudierons les seuls modes susceptibles d'être instables vis-à-vis du ballooning : pour cela nous allons devoir établir un « ordering » particulier des différentes grandeurs physiques caractéristiques du problème.

2.1 Une formulation linéarisée de la MHD

La dynamique d'un plasma MHD est, ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre I-2, décrite par un jeu de huit équations couplées, aux dérivées partielles.

L'équation de continuité qui décrit l'évolution de la densité de masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (2.1)$$

L'équation du mouvement qui traduit la relation fondamentale de la dynamique, en omettant ici les termes de dissipation :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{\nabla P_*}{\rho} + \frac{(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}}{\rho \mu}, \quad (2.2)$$

où P_* représente la somme de la pression thermique du plasma et de la pression magnétique.

L'évolution du champ magnétique est donnée par l'équation d'induction dans laquelle, pour traiter uniquement de MHD idéale, nous avons négligé le terme de diffusion :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.3)$$

Ce système d'équations est fermé par l'introduction de l'équation d'état d'un plasma adiabatique $d/dt(P\rho^{-\gamma}) = 0$, ce qui devient dans une formulation eulérienne :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \vec{v}, \quad (2.4)$$

où γ est l'indice adiabatique du milieu.

Sans outil de simulation numérique le caractère fortement non linéaire des équations de la MHD interdit toute étude directe de ce système, hormis dans certains contextes très particuliers et souvent très réducteurs. La linéarisation des équations permet de lever cette difficulté tout en permettant d'appréhender le comportement physique du plasma dans l'hypothèse de petits écarts à l'équilibre dynamique.

D'après les explications fournies en annexe A.2, la linéarisation consiste dans un premier temps à décrire les quantités suivies par les équations comme étant la somme d'un terme d'ordre zéro, invariant dans le temps, et d'une petite perturbation de ce terme (du premier ordre) : $X = X_0 + \delta X$ avec $|\delta X/X_0| \ll 1$. Puis dans une seconde phase, une fois que l'on a injecté cette prescription des grandeurs physiques dans les équations, on néglige les termes produits de perturbations : $|\delta X/X_0| \gg |\delta X/X_0|^n$. On obtient ainsi un jeu d'équations linéaires décrivant l'évolution des écarts à l'équilibre. Dans le cas le plus général et en particulier pour le « ballooning », les grandeurs stationnaires ne sont pas uniformes mais ont des variations spatiales, en revanche, dans un premier temps nous allons considérer un plasma sans mouvement à l'équilibre — le cas plus général d'un plasma en mouvement à l'équilibre, présenté en annexe B.1, ne change pas la forme des équations linéarisées mais y inclut éventuellement des

forces supplémentaires. Si on suppose $\vec{v}_0 = \vec{0}$, les équations présentées ci-dessus deviennent dans leur formulation linéarisée :

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{B}_0), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = -\delta \vec{v} \cdot \nabla P_0 - \gamma P_0 \nabla \cdot \delta \vec{v}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta P_*}{\rho_0} + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{B}}{\rho_0 \mu} + \frac{(\delta \vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}_0}{\rho_0 \mu}, \quad (2.8)$$

$$\text{où } \delta P_* = \delta P + \frac{\vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}}{\mu}.$$

Quant aux termes d'ordre zéro, supposés invariants dans le temps, on constate qu'ils vérifient trivialement les équations (2.1, 2.3 et 2.4). L'équation du mouvement (2.2) conduit, quant à elle, à une relation entre la pression thermique et le champ magnétique d'équilibre :

$$\nabla P_0 = -\nabla \left(\frac{B_0^2}{2\mu} \right) + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0}{\mu}. \quad (2.9)$$

Nous appelons \vec{e}_\parallel le vecteur unitaire colinéaire à \vec{B}_0 : $\vec{e}_\parallel = \vec{B}_0/B_0$. Ainsi, nous pouvons définir l'opérateur ∇_\perp tel que : $\nabla = \nabla_\perp + \vec{e}_\parallel \cdot \nabla$. La relation (2.9) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\nabla P_0 = \nabla_\perp P_0 = \rho_0 V_A^2 \left(\vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b\perp} \right), \quad (2.10)$$

où V_A est la vitesse d'Alfvén,

$$\vec{\mathcal{K}}_c = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel \quad (2.11)$$

caractérise (l'inverse de) l'échelle de courbure du champ magnétique et

$$\vec{\mathcal{K}}_b = \frac{\nabla B_0}{B_0} \quad (2.12)$$

caractérise (l'inverse de) l'échelle spatiale de variation du champ magnétique. Bien entendu, $\vec{\mathcal{K}}_{b\perp}$ est la composante de $\vec{\mathcal{K}}_b$ perpendiculaire à \vec{B}_0 . Nous voyons également que la force due à la pression thermique ne possède pas de composante parallèle au champ magnétique d'équilibre car elle est contrebalancée par la seule force de Lorentz ($\vec{j} \times \vec{B}_0$).

En outre, l'équation d'état barotropique donne une relation entre les échelles caractéristiques de pression et de densité :

$$\nabla P_0 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \nabla \rho_0 \implies \vec{\mathcal{K}}_p = \gamma \vec{\mathcal{K}}_\rho, \quad (2.13)$$

dont on déduit aisément une relation générale entre toutes les échelles caractéristiques, à partir de la relation (2.10) :

$$\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho = \vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b_\perp}, \quad (2.14)$$

où β est le rapport des vitesses sonore et d'Alfvén — différent du coefficient β habituel (rapport des pressions) d'un facteur $\gamma/2$.

2.2 Introduction du vecteur déplacement

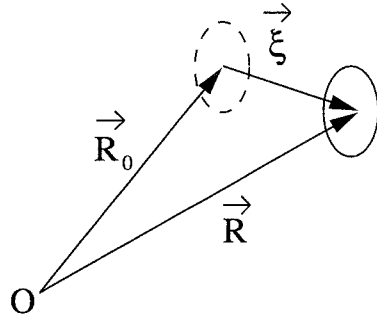


FIG. 2.1 – Vecteur déplacement infinitésimal.

Que le plasma à l'équilibre soit en mouvement ou non, il apparaît assez naturellement que l'on peut exprimer toutes les quantités physiques perturbées en fonction du vecteur déplacement $\vec{\xi}(\vec{R}_o, t)$, qui traduit l'écart (infinitésimal dans le cas linéaire) de position d'un élément fluide par rapport à sa position d'équilibre à un instant donné. Dans le cas, traité ici, d'un plasma sans mouvement d'équilibre, la vitesse d'un élément fluide se résume à la dérivée du vecteur position. En effet, la dérivation de la composition vectorielle montrée sur la figure 2.1 conduit à la relation :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = \vec{v}_o + \delta \vec{v};$$

dont on en déduit que $\delta \vec{v} = \partial / \partial t \vec{\xi}(\vec{R}_o, t)$. De plus, compte tenu de l'approximation linéaire, les dérivées spatiales en \vec{R} se réduisent à des dérivées en \vec{R}_o :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x_o^i} + \nabla_{\vec{R}_o} \cdot (\xi^i) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \approx \frac{\partial}{\partial x_o^i} \quad \text{car} \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x_o^j} \ll 1.$$

On peut donc remplacer la fluctuation de vitesse du plasma par la dérivée temporelle du déplacement dans l'ensemble des équations linéarisées [2.5-2.8]. L'intégration de ces équations par rapport au temps donne ainsi les relations suivantes :

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho_o \vec{\xi}), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \delta \vec{B} &= \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_o) \\ &= -\vec{B}_o \nabla \cdot \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_o + (\vec{B}_o \cdot \nabla) \vec{\xi}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\delta P_* = \underbrace{-\vec{\xi} \cdot \nabla P_o - \gamma P_o \nabla \cdot \vec{\xi}}_{\delta P} + \underbrace{\frac{\vec{B}_o \cdot \delta \vec{B}}{\mu}}_{\delta P_m}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\frac{\nabla \delta P_*}{\rho_o} + \frac{(\vec{B}_o \cdot \nabla) \delta \vec{B}}{\rho_o \mu} + \frac{(\delta \vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}_o}{\rho_o \mu}. \quad (2.18)$$

Pour que cette intégration soit valide on suppose que les termes d'ordre zéro restent constants, c'est-à-dire que l'on néglige la rétroaction des perturbations sur la structure d'équilibre. Ceci est licite dans l'approximation linéaire où les quantités perturbées sont très petites devant celles d'équilibre ; elles évoluent sur des échelles de temps nécessairement beaucoup plus courtes que le temps qu'il leur faut pour modifier l'ordre zéro. En outre, l'approximation de perturbations linéaires n'est bien évidemment plus valable lorsque l'équilibre se trouve modifié.

2.3 Ondes MHD en milieu homogène

Dans cette section nous allons dériver les relations de dispersion des modes linéaires pouvant se propager dans un plasma magnétisé, homogène et sans mouvement d'équilibre, en réponse à une perturbation initiale de faible amplitude ; ces ondes MHD sont les ondes d'Alfvén et les ondes magnétosonores lentes et rapides. Cette étude classique, bien qu'a priori éloignée du contexte du ballooning, va nous conduire à mettre en évidence un « ordering » pertinent pour la suite.

Bien que l'on assimile le plasma à un fluide composé d'une seule espèce, on ne néglige pas le faible écart de vitesse entre les électrons et les protons, c'est-à-dire le courant circulant dans le plasma. En présence de champ magnétique, ce courant va considérablement complexifier la dynamique du fluide à travers la force de Lorentz. Alors que dans un milieu immobile, sans gravité, les seules modes présents sont des ondes longitudinales sonores dues à la compression du fluide, dans un plasma MHD magnétisé coexistent les ondes transverses d'Alfvén dont le moteur est la tension magnétique et les ondes magnétosoniques produites par des variations dans la pression totale du plasma (thermique et magnétique).

Pour le problème étudié dans cette section, en raison de l'équilibre homogène, le jeu d'équations [2.15-2.18] se réduit à :

$$\delta \vec{B} = -\vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{\xi}, \quad (2.19)$$

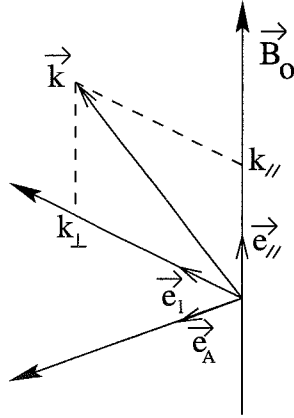
$$\delta P_* = -\gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} + \frac{B_0}{\mu} \delta B_{\parallel}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\frac{\nabla \delta P_*}{\rho_0} + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{B}}{\rho_0 \mu}. \quad (2.21)$$

Nous travaillons sur des équations linéaires, avec des grandeurs d'équilibre uniformes et il est donc possible de chercher des solutions aux équations (2.19), (2.20) et (2.21) sous la forme de modes de Fourier temporels et spatiaux. Le vecteur déplacement peut alors être écrit :

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 e^{i\Phi} = \vec{\xi}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

où Φ et $\vec{\xi}_0$ sont la phase et l'amplitude (ici uniforme) du mode, $\vec{k} = \nabla \Phi$ son vecteur d'onde et $\omega = -d\Phi/dt$ sa pulsation.

FIG. 2.2 – Définition du repère $(\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_A)$.

Dans cette représentation, on a simplement

$$\delta \vec{B} = -i B_0 [k_\perp \xi_\perp \vec{e}_\parallel - k_\parallel (\xi_\perp \vec{e}_\perp + \xi_A \vec{e}_A)], \quad (2.22)$$

$$\delta P_* = -i \rho_0 [(C_S^2 + V_A^2) k_\perp \xi_\perp + C_S^2 k_\parallel \xi_\parallel], \quad (2.23)$$

$$-\omega^2 \vec{\xi} = i \left(-\frac{1}{\rho_0} \delta P_* \vec{k} - \frac{B_0}{\rho_0 \mu} \delta B_\parallel \vec{k} + \frac{B_0}{\rho_0 \mu} k_\parallel \delta \vec{B} \right), \quad (2.24)$$

avec $C_S^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ et $V_A^2 = B_0^2 / (\rho_0 \mu)$, les carrés des vitesses du son et d'Alfvén. En introduisant $\delta \vec{B}$ et δP_* dans l'équation du mouvement, on réduit l'ensemble des équations de la MHD à une seule équation — vectorielle — portant sur le vecteur déplacement. Finalement, une fois cette équation projetée sur les axes du référentiel $(\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_A)$ elle se résume aux trois relations suivantes :

$$(\omega^2 - C_S^2 k_\parallel^2) \xi_\parallel = C_S^2 k_\parallel k_\perp \xi_\perp, \quad (2.25)$$

$$(\omega^2 - C_S^2 k_\perp^2 - V_A^2 k_\parallel^2) \xi_\perp = C_S^2 k_\parallel k_\perp \xi_\parallel, \quad (2.26)$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k_\parallel^2) \xi_A = 0. \quad (2.27)$$

2.3.1 Ondes d'Alfvén

La dernière de ces équations, (2.27), donne directement la relation de dispersion des ondes d'Alfvén :

$$\omega^2 = k_\parallel^2 V_A^2. \quad (2.28)$$

Le référentiel le plus naturel pour exprimer les équations de la MHD dans le cas présent est celui qui, représenté sur la figure 2.2, est formé par les trois vecteurs unitaires suivants : le vecteur \vec{e}_\parallel parallèle aux lignes de champ magnétique d'équilibre, le vecteur longitudinal $\vec{e}_\perp = \vec{k}_\perp / k_\perp$, colinéaire à la composante perpendiculaire à \vec{B}_0 du vecteur d'onde \vec{k} puis le vecteur $\vec{e}_A = \vec{e}_\parallel \times \vec{e}_\perp$ orthogonal aux deux précédents ; cette définition implique que $\vec{\xi}$ doit rester invariant suivant \vec{e}_A . Nous écrivons $(\xi_\parallel, \xi_\perp, \xi_A)$ les composantes du vecteur déplacement $\vec{\xi}$ dans le référentiel cartésien $(\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_A)$.

On constate sur la figure 2.3 et à la lecture de la relation (2.27) que ces ondes se propagent suivant la direction du champ magnétique et que, non seulement elles correspondent à la propagation d'un ébranlement transverse (le déplacement $\vec{\xi}_A$ est perpendiculaire au vecteur d'onde \vec{k}) mais de plus, le déplacement est orthogonal aux lignes de champ magnétique non perturbé.

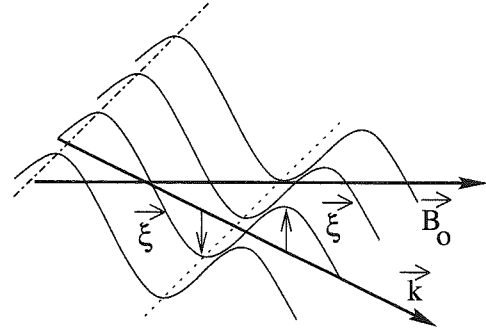


FIG. 2.3 – Propagation d'une onde d'Alfvén.

On remarque également d'après la relation (2.22) que le déplacement $\vec{\xi}_A$ engendre une perturbation du champ magnétique perpendiculaire au champ d'équilibre (et déphasée de $\pi/2$): $\delta\vec{B} = iB_0 k_{\parallel} \xi_A \vec{e}_A$. De même la relation (2.23) nous montre que pour cette onde $\delta P_* = 0$; linéairement, elle ne s'accompagne d'aucune variation de la pression totale du plasma.

Cette propriété fait généralement des ondes d'Alfvén les candidates les plus propices pour conduire à la déstabilisation d'un plasma. En effet, pour ce type d'ébranlement le mécanisme déstabilisant ne va pas dissiper d'énergie dans la compression du plasma; celle-ci va intégralement permettre la croissance du mode instable.

2.3.2 Ondes magnétosoniques

Pour extraire les relations de dispersion des ondes magnétosoniques lentes et rapides à partir des relations (2.25) et (2.26) on applique une méthode classique d'étude des équations linéarisées qui consiste à écrire ce système algébrique sous forme matricielle puis à annuler le déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} (\omega^2 - C_S^2 k_{\parallel}^2) & -C_S^2 k_{\parallel} k_{\perp} \\ -C_S^2 k_{\parallel} k_{\perp} & (\omega^2 - C_S^2 k_{\perp}^2 - V_A^2 k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\parallel} \\ \xi_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le système possède un espace vectoriel de solutions non triviales si, et seulement si, cette matrice n'est pas inversible, c'est-à-dire lorsque son déterminant est nul. Par ce moyen nous pouvons exprimer les relations de dispersion des modes magnétosoniques rapides (signe +) et lents (signe -):

$$\omega_{f,s}^2 = \frac{k^2}{2} \left[(C_S^2 + V_A^2) \pm \sqrt{(C_S^2 + V_A^2)^2 - 4 C_S^2 V_A^2 \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2} \right]. \quad (2.29)$$

Dans la suite, nous noterons respectivement ω_f et ω_s les pulsations des ondes magnétosoniques rapides et lentes.

Contrairement aux ondes d'Alfvén ou aux ondes sonores, les ondes magnétosoniques ne sont ni transverses, ni longitudinales ; dans le cas général elles se propagent dans le plan formé par les vecteurs \vec{k} et \vec{B}_0 avec des célérités V_S et V_F données par la relation (2.29). Toutefois, nous devons préciser deux comportements limites.

Premièrement, lorsque $k_\perp = 0$, les ondes magnétosoniques se décomposent d'une part en une onde sonore pure (longitudinale) et d'autre part en une onde d'Alfvén (transversale). Dans ce cas on a donc une dégénérescence des ondes d'Alfvén.

Deuxièmement, nous observons sur la figure 2.4 qu'en propagation perpendiculaire ($k_\parallel = 0$, $\theta_B = \pm\pi/2$) le mode magnétosonique rapide devient longitudinal ($\vec{k} \parallel \vec{\xi}$) et la propagation se fait avec une célérité maximale $V_F^2 = C_S^2 + V_A^2$. En effet, ce mode correspond à un mode « sonore » dont on aurait modifié la prescription de la pression en la remplaçant par la pression totale. De plus, il apparaît qu'en propagation perpendiculaire aux lignes de champ magnétique, le mode magnétosonique lent disparaît. Nous pouvons tout de même noter que la composante parallèle de ce mode possède une vitesse limite en propagation quasi-perpendiculaire. Un développement limité de la relation de dispersion (2.29), au premier ordre en k_\parallel/k_\perp , donne :

$$\omega_{f,s}^2 = \frac{k_\perp^2}{2} \left[(C_S^2 + V_A^2) \pm (C_S^2 + V_A^2) \left(1 - 2 \frac{C_S^2 V_A^2}{(C_S^2 + V_A^2)^2} \left(\frac{k_\parallel}{k_\perp} \right)^2 \right) \right].$$

Le signe « + » nous donne la célérité des ondes magnétosoniques rapides perpendiculaires : $V_F^2 = \omega_f^2/k_\perp^2 = C_S^2 + V_A^2$ alors que le signe « - » nous conduit à la limite de la vitesse parallèle de l'onde magnétosonique lente :

$$V_{S\perp}^2 = \frac{\omega_s^2}{k_\parallel^2} = \frac{C_S^2 V_A^2}{C_S^2 + V_A^2} = \frac{C_S^2}{1 + \beta} = V_A^2 \frac{\beta}{1 + \beta}. \quad (2.30)$$

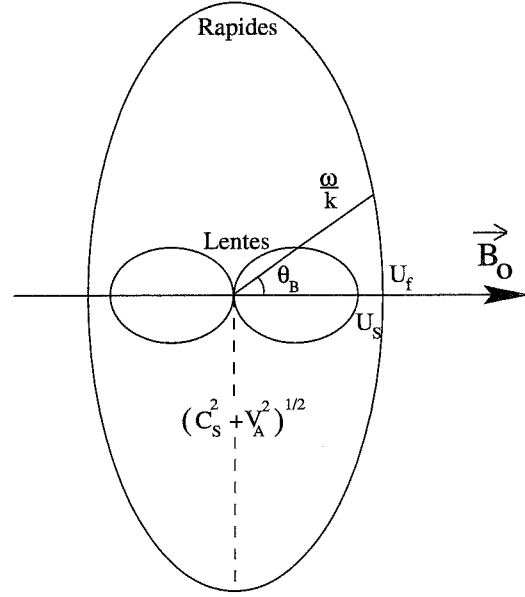


FIG. 2.4 – Célérité des ondes magnétosoniques se propageant avec un angle θ_B relativement à \vec{B}_0 .

Chapitre 3

Ordering naturel du ballooning

Sommaire

3.1 Ondes potentiellement instables	67
3.2 Propriétés découlant de l'ordering ballooning	69
3.3 Développement WKB partiel	71
3.4 Ondes MHD en milieu hétérogène	71
3.5 Perturbations incompressibles	72

3.1 Ondes potentiellement instables

Nous allons à présent montrer dans quel contexte la déstabilisation des ondes MHD, présentées pour un milieu homogène dans la section précédente, pourra conduire à la croissance de modes de ballooning.

Nous souhaitons produire une turbulence locale dans un plasma MHD ; les instabilités que nous recherchons doivent donc elles-mêmes rester locales. Cette hypothèse se traduit physiquement par le fait que les échelles spatiales des modes auxquels nous nous intéressons doivent être beaucoup plus petites que les hétérogénéités de l'équilibre, caractérisées par une échelle que nous noterons L_o . La localité impose donc aux modes recherchés d'avoir un nombre d'onde k tel que, $kL_o \gg 1$, mais cette contrainte n'est pas forcément compatible avec la nécessité d'avoir $\omega^2 < 0$ pour un mode instable (voir annexe A).

En effet, la prise en compte dans les équations de la MHD des termes liés aux variations de la pression et à la courbure du champ magnétique d'équilibre, introduit dans les relations de dispersion (2.25), (2.26) et (2.27) des termes supplémentaires proportionnels à L_o^{-1} — nous les explicitons en annexe B. Pour rendre le plasma instable, il faut nécessairement que ces termes soient du même ordre de grandeur que ceux présents dans les équations homogènes, stables, afin de pouvoir les affecter de façon significative et rendre ainsi négatif le signe de ω^2 . Or, si nous imposons à k_{\parallel} et k_{\perp} , voire seulement à k_{\parallel} , d'être très supérieur à L_o^{-1} , les relations de dispersion dérivées précédemment sont quantitativement très peu modifiées par

la prise en compte de variations spatiales dans l'équilibre et on montre clairement qu'aucune déstabilisation des ondes MHD n'est alors envisageable.

Effectivement, dans l'hypothèse où $k_{\parallel} L_o \gg 1$, les termes en L_o^{-1} ne vont pas changer sensiblement la relation de dispersion des ondes d'Alfvén :

$$\omega_A^2 \simeq k_{\parallel}^2 V_A^2 \gg L_o^{-2} V_A^2.$$

De même, pour les ondes magnétosoniques on montre aisément que :

$$\omega_{f,s}^2 \simeq k^2 (V_A^2 + C_S^2) \gg L_o^{-2} V_A^2 \quad \text{lorsque } k_{\perp} L_o \gg 1 \text{ ou } k_{\parallel} L_o \gg 1$$

$$\text{et que } \omega_{f,s}^2 \simeq k_{\parallel}^2 \left\{ \begin{array}{l} C_S^2 \\ V_A^2 \end{array} \right\} \gg L_o^{-2} V_A^2 \quad \text{lorsque } k_{\parallel} L_o \gg 1 \text{ et } k_{\perp} L_o \sim 1.$$

Ceci démontre que dans ce contexte où les hétérogénéités sont isotropes, les ondes MHD ne sont pas localement instables lorsque leur propagation parallèle est importante.

En revanche en supposant $k_{\parallel} L_o \sim 1$ avec $k_{\perp} L_o \gg 1$ — ce qui ne contredit en rien l'hypothèse de localité des processus physiques car $k = \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}$ reste beaucoup plus grand que L_o^{-1} — nous pouvons envisager une déstabilisation des ondes magnétosoniques lentes et d'Alfvén : nous discutons dans la section 3.3, l'utilisation de la notation k_{\parallel} pour caractériser les variations parallèles. Si nous effectuons un développement limité de la relation de dispersion des ondes magnétosoniques (2.29) en fonction du petit paramètre $\varepsilon = k_{\parallel}/k_{\perp}$ nous pouvons montrer que les ondes rapides ne peuvent être déstabilisées car :

$$\omega_f^2 \simeq k_{\perp}^2 \left[(C_S^2 + V_A^2) + \varepsilon^2 V_A^2 \frac{1 + \beta + \beta^2}{1 + \beta} \right] \simeq k_{\perp}^2 (C_S^2 + V_A^2) \gg L_o^{-2} V_A^2,$$

où l'on a posé $\beta = C_S^2/V_A^2$, mais, en revanche, pour les ondes lentes cela devient possible :

$$\omega_s^2 \simeq k_{\parallel}^2 V_A^2 \frac{\beta}{1 + \beta} \sim L_o^{-2} V_A^2.$$

La relation de dispersion des ondes d'Alfvén montre que leur déstabilisation devient également envisageable :

$$\omega_A^2 \simeq k_{\parallel}^2 V_A^2 \sim L_o^{-2} V_A^2.$$

Ainsi nous montrons que le plasma peut être déstabilisé uniquement via les ondes MHD lentes et les ondes d'Alfvén, lorsqu'elles se propagent quasi-perpendiculairement au champ magnétique d'équilibre. Seules ces ondes ont une célérité suffisamment faible pour avoir le temps de subir l'influence des gradients dans le plasma d'équilibre. Les ondes plus rapides quant à elles ne « perçoivent » pas les hétérogénéités du milieu et le traversent comme elles le feraient pour un plasma homogène.

3.2 Propriétés découlant de l'ordering ballooning

À partir de la discussion précédente, on peut établir l'ordering suivant lequel nous allons développer les équations de la MHD, de façon à ce que les gradients de la structure d'équilibre jouent un rôle majeur dans la déstabilisation des ondes. Cet ordering, proposé par Newcomb (1961), repose sur le développement en « petit paramètre » suivant :

$$L_o = L_o^{(0)} + o(\varepsilon^0), \quad k_{\parallel} = k_{\parallel}^{(0)} + o(\varepsilon^0) \quad \text{et} \quad k_{\perp} = \varepsilon^{-1} k_{\perp}^{(-1)} + o(\varepsilon^{-1}), \quad (3.1)$$

où l'on note $X^{(n)}$ le terme proportionnel à ε^n dans le développement de la grandeur physique X , ε étant une quantité infinitésimale :

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i X^{(i)}.$$

Lorsque nous introduisons ces quantités dans les équations de la MHD linéarisées et que nous les ordonnons en puissance de ε , nous obtenons une nouvelle série de relations, dont la première, qui caractérise l'équilibre, est nulle. Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'ordre dominant du petit paramètre ε dans ce développement, i.e. aux termes les plus grands. Nous considérons ici les vitesses caractéristiques du milieu à l'équilibre ; les perturbations de ces vitesses conduisent à des termes d'ordre supérieur dans le développement ordonné. Intéressons nous dans un premier temps à l'équation des modes d'Alfvén (2.27) :

$$\omega^2 = V_A^2 \left(k_{\parallel}^{(0)2} + o(\varepsilon^0) \right).$$

Elle démontre que la pulsation des ondes qui nous intéressent doit être d'ordre ε^0 :

$$\omega = \omega^{(0)} + o(\varepsilon^0). \quad (3.2)$$

Appliqué à la relation (2.26), on montre que l'ordering choisi dans le cadre de cette étude fixe une relation d'ordre entre les composantes parallèle et longitudinale du vecteur déplacement :

$$\varepsilon^{-2} (C_S^2 + V_A^2) k_{\perp}^{(-1)2} \xi_l + \varepsilon^{-1} C_S^2 k_{\parallel}^{(0)} k_{\perp}^{(-1)} \xi_{\parallel} + o(\varepsilon^0) = 0. \quad (3.3)$$

Dans l'équation (2.26), ω^2 est en $o(\varepsilon^0)$; on peut donc le négliger car il est d'un ordre plus petit que celui des deux autres termes présents. Nous souhaitons bien entendu trouver une solution $\vec{\xi}$ autre que la solution triviale $\xi_l = \xi_{\parallel} = 0$, par conséquent, afin que les deux composantes du vecteur déplacement vérifient (3.3), nous devons considérer que ξ_l est d'un ordre plus faible que ξ_{\parallel} . Le système que nous étudions étant linéaire nous ne nous intéressons pas à l'amplitude absolue des composantes du vecteur déplacement, mais plutôt à leur amplitude relative.

$$\text{On doit alors avoir } \xi_l \sim \varepsilon \xi_{\parallel} \quad \text{qui, explicité comme} \quad \begin{cases} \xi_l = \varepsilon^2 \xi_l^{(2)} + o(\varepsilon^2) \\ \xi_{\parallel} = \varepsilon \xi_{\parallel}^{(1)} + o(\varepsilon^1) \end{cases}, \quad (3.4)$$

décrit un déplacement perturbatif du plasma ($\xi \ll L_o$) dirigé principalement suivant la direction du champ magnétique d'équilibre. Nous constatons en outre que cette propriété du déplacement du plasma est en plein accord avec la relation (2.25) :

$$\varepsilon \left(\omega^{(0)2} - C_S^2 k_{\parallel}^{(0)2} \right) \xi_{\parallel}^{(1)} = \varepsilon \left(C_S^2 k_{\parallel}^{(0)} k_{\perp}^{(-1)} \right) \xi_l^{(2)}.$$

Nous pouvons mettre en évidence une autre propriété intéressante du plasma, découlant de cet ordering particulier. En effet, pour la suite il est important de noter que ces hypothèses imposent l'incompressibilité des perturbations du milieu. Après simplification de la relation (3.3) par $k_{\perp}^{(-1)}$, on obtient :

$$(C_S^2 + V_A^2) k_{\perp}^{(-1)} \xi_l^{(2)} + C_S^2 k_{\parallel}^{(0)} \xi_{\parallel}^{(1)} + o(\varepsilon^1) = 0,$$

où l'on reconnaît l'expression (2.23) de la pression totale du milieu (somme de la pression thermique et de la pression magnétique). Au premier ordre, la perturbation de pression totale du plasma doit par conséquent rester nulle :

$$\delta P_{*}^{(1)} = \delta P^{(1)} + \delta P_m^{(1)} = 0. \quad (3.5)$$

Cette propriété ne signifie pas que la pression ne joue aucun rôle dans le ballooning, bien au contraire. Cela signifie simplement que l'évolution des perturbations du plasma va se faire, dans ce contexte, sans compression de la matière et du champ magnétique — les mouvements des tubes de flux sont assimilés, au premier ordre, à des processus quasistatiques vis-à-vis des modes magnétosoniques transverses qui maintiennent ainsi un équilibre de pression entre le plasma perturbé et son environnement. Comme nous allons le voir par la suite, le gradient de pression du plasma d'équilibre va contrôler la dynamique de l'instabilité à travers son action purement mécanique consistant à pousser la matière.

Avant de poursuivre plus en avant notre étude, nous devons nécessairement nous assurer que les propriétés que nous avons mises ici en évidence, dans le cas d'un plasma uniforme, peuvent se généraliser à celui d'un plasma non homogène.

Les deux propriétés découlant directement de l'ordering ballooning sont la relation entre les composantes de $\vec{\xi}$ et l'incompressibilité des perturbations, or ces deux propriétés ont été déduites à partir de la relation (3.3). La prise en compte de l'hétérogénéité du plasma va en pratique y introduire des termes dont les plus importants pourront s'écrire comme $\varepsilon \xi_l / L_o$ et $\varepsilon \xi_{\parallel} / L_o$.

Mais, $\varepsilon \xi_l / L_o$ restera négligeable devant $(C_S^2 + V_A^2) k_{\perp}^{(0)2} \xi_l$ et $\varepsilon \xi_{\parallel} / L_o$ va simplement s'ajouter à $\varepsilon C_S^2 k_{\parallel}^{(1)} k_{\perp}^{(0)} \xi_{\parallel}$. La contribution des gradients des termes d'équilibre ne va donc pas modifier qualitativement la relation d'ordre (3.4) entre ξ_l et ξ_{\parallel} , ni par conséquent le mouvement perturbatif du plasma.

Quant à la propriété d'incompressibilité des perturbations, nécessaire à la faisabilité de nos calculs, nous allons voir par la suite qu'elle découle également de l'ordering ballooning dans le cas d'un plasma non uniforme.

3.3 Développement WKB partiel

Bien que cela reste conceptuellement correct, l'introduction dans la discussion ci-dessus de la composante parallèle du vecteur d'onde est en contradiction avec l'hypothèse de développement WKB faite implicitement. Comme expliqué en annexe A, l'approximation WKB — consistant à faire une étude en modes de Fourier dans un milieu hétérogène — repose sur le fait que l'on peut négliger les variations spatiales des termes d'ordre zéro devant celles des termes perturbatifs. Or, cela n'est plus le cas ici car, pour les perturbations, nous considérons une échelle spatiale dans la direction des lignes de champ magnétique d'équilibre du même ordre que l'échelle des grandeurs d'ordre zéro : $L_o^{-1} \sim \vec{e}_\parallel \cdot \nabla \xi / \xi$. Cela nous interdit d'introduire un vecteur d'onde possédant une composante parallèle. On doit donc à présent considérer des perturbations de la forme :

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_o e^{i\Phi} \quad \text{avec toujours} \quad \omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{mais où} \quad \vec{k}_\perp = \nabla_\perp \Phi. \quad (3.6)$$

Les variations spatiales de l'amplitude des perturbations, suivant la direction \vec{e}_\parallel mais aussi la direction \vec{e}_A , sont à présent contenues dans $\vec{\xi}_o$. On définit maintenant le paramètre de l'ordering du ballooning, ε , comme :

$$\varepsilon^{-1} \sim k_\perp L_o \sim k_\perp \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \quad \text{où l'on note} \quad \frac{\partial}{\partial s} = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla). \quad (3.7)$$

Bien entendu, il est possible de faire un développement WKB complet — c'est-à-dire non seulement en direction perpendiculaire mais aussi en direction parallèle — des équations de la MHD. Cette hypothèse, en contrepartie des simplifications qu'elle introduit — mais dont nous allons pouvoir nous passer — conduit à une perte de généralité dans le traitement de l'instabilité de ballooning car il faudrait introduire une relation d'ordre supplémentaire entre les composantes des gradients des termes d'équilibre :

$$k_\perp L_{o\parallel} \gg k_\parallel L_{o\parallel} \gg 1 \quad \text{avec en outre} \quad k_\parallel L_{o\perp} \sim 1.$$

Dans le cas contraire où $L_{o\parallel}$ devient infini, nous pouvons bien entendu effectuer une transformation de Fourier suivant les lignes de champ magnétique. Alors, toute la discussion sur les modes susceptibles de déstabiliser un plasma reste encore valable dans la limite où $k_\parallel L_{o\perp} \ll 1$, avec $k_\perp L_{o\perp} \gg 1$.

3.4 Ondes MHD en milieu hétérogène

Dans cette partie du manuscrit, nous allons pousser plus loin l'étude des ondes MHD ; contrairement au cas de la section 2.3, nous allons maintenant prendre en compte les effets d'hétérogénéité du plasma, c'est-à-dire que nous tiendrons compte des gradients des grandeurs d'équilibre — ou d'ordre zéro. Evidemment, afin de rendre pertinent ce travail sur

la stabilité des ondes MHD vis-à-vis du ballooning, nous développerons les équations suivant l'ordering présenté ci-dessus — qui peut potentiellement rendre les ondes instables — et les propriétés qui en sont issues. Alors que les ondes d'Alfvén et magnétozoniques lentes sont indépendantes lorsqu'elles se propagent en milieu homogène, les variations spatiales de la pression et du champ magnétique d'équilibre vont à présent coupler ces deux types d'ondes — en propagation quasi-transverse. En revanche, les ondes magnétozoniques rapides ne seront, quant à elles, pas affectées par ces gradients.

Le point de départ de cette étude est donné par les équations de la MHD linéarisée [2.15-2.18] dont l'inconnue est le vecteur déplacement défini par (3.6), puis l'ordering (3.7) impliquant (3.2) et (3.4).

Nous devons cependant compléter la définition de l'ordering en y incluant les propriétés du plasma suivant \vec{e}_A ; ce vecteur détermine la direction « alfvénique », nous considérons donc que les variations des perturbations doivent, a priori, être lentes suivant \vec{e}_A , c'est-à-dire qu'elles doivent se faire sur des échelles de l'ordre ou plus grandes que L_o . En outre, si nous considérons l'amplitude du déplacement ξ_A du même ordre que $\xi_{||}$, ces deux composantes vont avoir des contributions de même importance dans les équations linéarisées non homogènes. Ces hypothèses se traduisent par :

$$L_o \frac{1}{\xi} (\vec{e}_A \cdot \nabla) \xi \sim 1 \quad \text{et} \quad \xi_A \sim \xi_{||}. \quad (3.8)$$

3.5 Perturbations incompressibles

Comme nous l'avons mentionné précédemment, notre étude analytique du ballooning suppose d'avoir des perturbations incompressibles. Nous devons donc, dans un premier temps, vérifier cette hypothèse. Pour cela, nous allons évaluer l'importance relative des différentes forces figurant dans l'équation du mouvement (2.18); il nous faut, en particulier, comparer les termes qui apparaissent dans l'expression de la tension magnétique, avec ceux présents dans la pression totale du plasma. Premièrement, examinons l'ordre de grandeur de la fluctuation de champ magnétique $\delta\vec{B}$, à partir de la relation (2.16) :

$$\left. \begin{aligned} \delta\vec{B} &= (\vec{B}_o \cdot \nabla) \vec{\xi} && \sim \varepsilon B_o \frac{\xi_{||}^{(1)}}{L_o} \{ \vec{e}_{||}, \vec{e}_l, \vec{e}_A \} \\ - &(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_o && \sim \varepsilon B_o \frac{\xi_{||}^{(1)}}{L_o} \{ \vec{e}_{||}, \vec{e}_l, \vec{e}_A \} \\ - &\vec{B}_o \nabla \cdot \vec{\xi} && \sim \varepsilon B_o \frac{\xi_{||}^{(1)}}{L_o} \vec{e}_{||} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta\vec{B} \sim \varepsilon B_o \frac{\xi_{||}^{(1)}}{L_o} \{ \vec{e}_{||}, \vec{e}_l, \vec{e}_A \}.$$

De cette évaluation de $\delta\vec{B}$ on déduit l'ordre de grandeur des deux termes présents dans l'expression de la force de tension magnétique :

$$\delta\vec{I} = \underbrace{\frac{(\delta\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}_o}{\rho_o \mu}} - \underbrace{\frac{(\vec{B}_o \cdot \nabla) \delta\vec{B}}{\rho_o \mu}},$$

$$\sim \varepsilon \rho_o V_A^2 \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o^2} \{\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l, \vec{e}_A\} \sim \varepsilon \rho_o V_A^2 \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o^2} \{\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}$$

ce qui nous conduit à assimiler les trois composantes de la tension magnétique à des quantités d'ordre ε :

$$\delta\vec{I} \sim \varepsilon \rho_o V_A^2 \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o^2} \{\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}.$$

En revanche, on constate que la composante de la force de pression totale suivant \vec{e}_l — et cette composante seulement — est en ε^0 car, comme il est montré ci-dessous, la pression totale est d'ordre ε :

$$\delta P_* = - \underbrace{(\vec{\xi} \cdot \nabla) P_o}_{\sim \varepsilon P_o \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o}} - \underbrace{\gamma P_o \nabla \cdot \vec{\xi}}_{\sim \varepsilon \gamma P_o \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o}} + \underbrace{\frac{B_o \delta B_{\parallel}}{\mu}}_{\sim \varepsilon \frac{B_o^2}{\mu} \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o}} \sim \varepsilon \rho_o \{C_S^2, V_A^2\} \frac{\xi_{\parallel}^{(0)}}{L_o},$$

et la force de pression transversale, produite par $\vec{e}_l \cdot \nabla \sim i k_{\perp}^{(-1)}$ en ε^{-1} , est plus importante que les deux autres composantes, d'un ordre de grandeur :

$$\vec{e}_l \cdot \nabla \delta P_* \sim \rho_o \{C_S^2, V_A^2\} \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o^2}.$$

De plus, le terme d'accélération transversale de la matière, lié à la dérivée temporelle de la fluctuation de quantité de mouvement varie, d'après l'ordering suivi, en ε^2 :

$$\frac{\partial^2 \xi_l}{\partial t^2} \sim \omega^{(0)2} \varepsilon^2 \xi_l^{(2)} \sim \varepsilon^2 V_A^2 \frac{\xi_{\parallel}^{(1)}}{L_o^2}.$$

Il résulte de ce calcul en ordre de grandeur que la projection de l'équation du mouvement suivant \vec{e}_l est d'ordre ε^0 et se résume à

$$\vec{e}_l \cdot \nabla \delta P_* = 0,$$

d'où l'on déduit que la perturbation de la pression totale du plasma est nécessairement nulle à l'ordre dominant.

Chapitre 4

Dérivation d'une relation de dispersion des modes ballooning

Sommaire

4.1	Cadre général du développement	75
4.2	Évaluation de la divergence du déplacement	76
4.3	Calcul de la perturbation magnétique	77
4.4	Calcul des forces MHD	78
4.5	Équation du mouvement perpendiculaire	80
4.6	Équation du mouvement parallèle	80
4.7	Propriétés des équations de dispersion	81

4.1 Cadre général du développement

Une fois mis en place l'ordering du ballooning, puis déduites les propriétés qui en découlent directement, nous allons chercher à obtenir l'équation de dispersion des modes de ballooning qui, dans le cas présent, prendra la forme d'un système de deux équations couplées en ξ_{\parallel} et ξ_A . Contrairement au cas d'un plasma homogène, traité précédemment dans la section 2.3, où ces deux composantes du vecteur déplacement varient indépendamment, le système d'équations que nous allons déterminer maintenant va traduire le couplage des ondes magnéto-soniques lentes avec les ondes d'Alfvén via les gradients de la structure d'équilibre. Dans cette section, nous ne traitons que les effets strictement MHD, en supposant que les forces d'origine extérieure s'insèrent naturellement dans notre cadre d'approximation.

Dans l'annexe B nous dérivons in-extenso les équations linéarisées de la MHD lorsque le milieu à l'équilibre présente des variations spatiales. En l'état, les équations finales, décrivant l'évolution temporelle du vecteur déplacement $\vec{\xi}$, sont inutilisables du fait de leur grande complexité ; c'est pourquoi nous avons cherché, à travers l'ordering ballooning, un régime d'étude dans lequel nous ne perdons rien de la physique pertinente pour notre problématique, tout en faisant abstraction d'une physique lourde à traiter et sans intérêt ici.

Dans le souci de simplifier l'écriture des calculs, nous considèrerons dans la suite les notations et les quantités introduites puis utilisées dans le développement de l'annexe B.2 :

- les échelles spatiales de différentes grandeurs physiques : $\vec{\mathcal{K}}_c, \vec{\mathcal{K}}_b, \vec{\mathcal{K}}_p, \vec{\mathcal{K}}_\rho$.
- la quantité $\vec{\delta} = \delta\vec{B}/B_o$ qui représente la fluctuation de champ magnétique normalisée par sa valeur d'équilibre.
- les dérivées spatiales parallèles au champ magnétique d'équilibre seront décrites en fonction de l'abscisse curviligne le long de ces lignes de champ : $\partial/\partial s = \vec{e}_\parallel \cdot \nabla$.

Comme dans le cas d'un plasma homogène nous allons chercher à dériver une équation de dispersion à partir des équations du mouvement données par (B.18). Dans la section précédente nous avons déjà montré que la projection suivant \vec{e}_\parallel de cette relation produit, à l'ordre dominant en ε :

$$\delta P_* = \delta P + \delta P_m = - \left(\vec{\xi} \cdot \nabla \right) P_o - \rho_o C_S^2 \nabla \cdot \vec{\xi} + \rho_o V_A^2 \delta_\parallel = 0, \quad (4.1)$$

ensuite, sa projection suivant \vec{e}_\parallel donne :

$$\rho_o \frac{\partial^2 \xi_\parallel}{\partial t^2} = - \frac{\partial \delta P}{\partial s} + \underbrace{\left(\vec{e}_\parallel \cdot \delta \vec{I} - \frac{\partial}{\partial s} (\rho_o V_A^2 \delta_\parallel) \right)}_{\text{force de Lorentz}} + \rho_o \mathcal{F}_\parallel(\vec{\xi}) \quad (4.2)$$

et suivant \vec{e}_A nous trouvons :

$$\rho_o \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} = \vec{e}_A \cdot \delta \vec{I} + \rho_o \mathcal{F}_A(\vec{\xi}), \quad (4.3)$$

où $\delta \vec{I}$ est la fluctuation de tension magnétique. $\vec{\mathcal{F}}$ est la densité massique de force d'origine extérieure ; elle englobe l'ensemble des contraintes autres que celles d'origine purement MHD, telles que la force de gravité ou la force d'entraînement, due aux mouvements d'équilibre.

Pour la suite des calculs nous allons évidemment nous appuyer sur les résultats de l'annexe B. Contrairement à la relation (4.3), dans la relation (4.2) portant sur le déplacement parallèle, il est préférable de ne pas utiliser la propriété d'incompressibilité des ondes car un calcul de la force de Lorentz parallèle $\delta(\vec{j} \times \vec{B})_\parallel$ est en pratique plus simple. Nous allons évaluer chacun des résultats intermédiaires de l'annexe à l'ordre dominant, compte tenu de l'ordering choisi, pour en définitive aboutir au système d'équations couplées que nous cherchons.

4.2 Évaluation de la divergence du déplacement

La formulation de la pression totale, déterminée en annexe, ainsi que la propriété d'incompressibilité du plasma à l'ordre perturbatif dominant vont nous permettre de calculer la divergence du déplacement perpendiculaire au champ magnétique d'équilibre puis la divergence du vecteur déplacement global. En effet, $\delta P_* = 0$ combiné avec la relation (B.34), que

l'on récrit en appliquant l'ordering ballooning, conduit à :

$$\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} + \mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A} \right) \xi_A + \beta \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \xi_{\parallel} + \underbrace{\beta \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \xi_{\parallel} \right)}_{\nabla \cdot \vec{\xi}_{\parallel}} + (1 + \beta) \nabla_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp} = 0,$$

dont on extrait la divergence du déplacement perpendiculaire :

$$\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} = -\frac{1}{1 + \beta} \left[\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} + \mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A} \right) \xi_A + \beta \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} + \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right]. \quad (4.4)$$

Puis, compte tenu de l'expression (B.20) de la divergence du déplacement parallèle, reprise ci-dessus, on exprime $\nabla \cdot \vec{\xi}$ comme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\xi} &= \nabla \cdot \vec{\xi}_{\parallel} + \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} \\ &= -\frac{1}{1 + \beta} \left[\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} + \mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A} \right) \xi_A - \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} - \beta \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il est important de noter que, compte tenu de l'ordering imposé, la composante ξ_{\perp} du vecteur déplacement n'apparaîtra plus dans les équations linéarisées de la MHD qu'à travers la divergence de $\vec{\xi}$.

4.3 Calcul de la perturbation magnétique

4.3.1 Composante parallèle

La relation (B.21) nous donne l'expression générale de la fluctuation de champ magnétique parallèle. En introduisant l'ordering ballooning nous obtenons directement :

$$\delta_{\parallel} = -\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} - (\mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A}) \xi_A,$$

car ξ_{\perp} est négligeable devant ξ_A et $\nabla_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp}$ qui, quant à eux, sont du même ordre de grandeur. Or, grâce à la propriété d'incompressibilité du plasma, nous avons pu évaluer ci-dessus la divergence de $\vec{\xi}_{\perp}$. Ainsi nous pouvons aisément reformuler la perturbation de champ magnétique parallèle :

$$\begin{aligned} \delta_{\parallel} = \frac{1}{1 + \beta} \left[\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} + \mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A} \right) \xi_A + \beta \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} + \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right. \\ \left. - (1 + \beta) (\mathcal{K}_{b_A} + \mathcal{K}_{c_A}) \xi_A \right], \end{aligned}$$

que l'on réorganise pour obtenir :

$$\delta_{\parallel} = \frac{\beta}{1 + \beta} \left[(\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} + \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right]. \quad (4.6)$$

4.3.2 Composante perpendiculaire

Dans le cas du champ magnétique perpendiculaire, nous partons de la relation (B.24) dans laquelle nous négligeons simplement ξ_l devant ξ_A pour arriver à :

$$\delta b_l = \Gamma_{lA}^- \xi_A, \quad (4.7)$$

$$\delta b_A = \Gamma_{AA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s}. \quad (4.8)$$

4.4 Calcul des forces MHD

4.4.1 Pression thermique

Nous effectuons le calcul de la pression thermique du plasma à partir de son expression générale donnée en (B.33) :

$$\delta P = -\rho_0 C_S^2 \left(\mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho A} \xi_A + \nabla \cdot \vec{\xi} \right).$$

Lorsque l'on remplace $\nabla \cdot \vec{\xi}$ par l'expression (4.5) nous aboutissons à l'équation :

$$\delta P = -\rho_0 C_S^2 \left[\mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho A} \xi_A - \frac{1}{1+\beta} \left(\left(\beta \mathcal{K}_{\rho A} + \mathcal{K}_{bA} + \mathcal{K}_{cA} \right) \xi_A - \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} - \beta \mathcal{K}_{\rho\parallel} \right) \xi_{\parallel} \right) \right],$$

puis nous factorisons les différents termes en $\mathcal{K}_{\rho A}$ pour arriver à la relation suivante :

$$\delta P = -\rho_0 C_S^2 \frac{1}{1+\beta} \left[\left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \right) \xi_{\parallel} \right], \quad (4.9)$$

où l'on reconnaît $V_S^2 = C_S^2/(1+\beta) = V_A^2 \beta/(1+\beta)$, la vitesse des ondes magnétosoniques lentes dans le cadre permis par l'ordering ballooning (i.e. en propagation quasi-transverse).

4.4.2 Force de Lorentz parallèle

Nous considérons l'expression (B.28) de la force de Lorentz et puis introduisons $\vec{\delta b}_{\perp}$ tel que nous l'avons déterminé ci-dessus en (4.7) et (4.8) :

$$\delta f_{\parallel} = \rho_0 V_A^2 \left[\left(\mathcal{K}_{b_l} - \mathcal{K}_{c_l} \right) \Gamma_{lA}^- \xi_A + \left(\mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{c_A} \right) \left(\Gamma_{AA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right) \right],$$

soit en ordonnant les termes,

$$\delta f_{\parallel} = \rho_0 V_A^2 \left[\left(\vec{\mathcal{K}}_b - \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A + \left(\mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{c_A} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right]. \quad (4.10)$$

4.4.3 Tension magnétique perpendiculaire

Nous avons déjà déterminé l'équation du mouvement transversale, suivant \vec{e}_l , en (4.1) ; il est donc à présent inutile de calculer la composante δT_l de la tension magnétique, négligeable devant la force de pression totale comme nous le démontrons dans la section 3.5. En revanche,

pour sa composante suivant \vec{e}_A , nous partons de la formulation de la tension magnétique perpendiculaire obtenue en annexe (B.31) et dans laquelle nous remplaçons $\vec{\delta}_\perp$ par son expression déterminée en (4.7) et (4.8); nous trouvons alors :

$$\delta\Gamma_A = \rho_o V_A^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{K}_{b\parallel} \right) \left(\Gamma_{AA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right) + \Gamma_{AI}^+ \Gamma_{IA}^- \xi_A \right. \\ \left. + \Gamma_{AA}^+ \left(\Gamma_{AA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right) + 2 \mathcal{K}_{cA} \delta_{\parallel} \right],$$

puis nous considérons δ_{\parallel} calculé en (4.6) :

$$\delta\Gamma_A = \rho_o V_A^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \xi_A + \left(\mathcal{K}_{b\parallel} + \Gamma_{AA}^+ + \Gamma_{AA}^- \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right) \xi_A \right. \\ \left. + 2 \mathcal{K}_{cA} \frac{\beta}{1 + \beta} \left[\left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \right) \xi_{\parallel} \right] \right\}.$$

Or, nous pouvons facilement mettre en évidence que $\left(\Gamma^+ + \Gamma^- \right)_{AA} = 0$; d'après la définition des opérateurs Γ^+ et Γ^- donnée en (B.23) nous voyons :

$$\Gamma_{AA}^{\pm} = \vec{e}_A \cdot [(\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \vec{e}_A \pm (\vec{e}_A \cdot \nabla) \vec{e}_{\parallel}] \quad \text{d'où}$$

$$\left(\Gamma^+ + \Gamma^- \right)_{AA} = 2 \vec{e}_A \cdot [(\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \vec{e}_A] = \vec{e}_A \cdot \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\vec{e}_A^2) = 0.$$

À présent, afin de condenser l'écriture de la tension magnétique et par conséquent celle des équations du mouvement, nous définissons les opérateurs de dispersion et de couplage, respectivement \mathcal{D}_A et \mathcal{C}_A , tels que :

$$\mathcal{D}_A \cdot \xi_A = V_A^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \xi_A + \mathcal{K}_{b\parallel} \frac{\partial \xi_A}{\partial s} + \left[\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \mathcal{K}_{cA} \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \right] \xi_A \right\}, \quad (4.11)$$

puis

$$\mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} = 2 V_S^2 \mathcal{K}_{cA} \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} \right). \quad (4.12)$$

Finalement, compte tenu de ces deux définitions, la perturbation de tension magnétique s'écrit simplement :

$$\delta\Gamma_A = \rho_o (\mathcal{D}_A \cdot \xi_A + \mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel}). \quad (4.13)$$

4.5 Équation du mouvement perpendiculaire

Étant données les définitions précédentes des opérateurs \mathcal{D}_A et \mathcal{C}_A — qui cachent la complexité intrinsèque du problème — l'équation du mouvement du plasma suivant \vec{e}_A va prendre une forme très simple. En effet, nous savons qu'à l'ordre dominant la perturbation de pression totale est nulle et à travers la relation (4.13) nous avons en outre établi une formulation simple de la tension magnétique; dans ce cadre, l'équation que nous cherchons prend la forme élémentaire suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - \mathcal{D}_A \cdot \xi_A = \mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} + \mathcal{F}_A(\vec{\xi}). \quad (4.14)$$

Nous reconnaissons dans cette équation la relation de dispersion des ondes d'Alfvén. Bien évidemment, par rapport au cas traité dans la section 2.3.1, la présence d'hétérogénéités dans la structure d'équilibre du plasma ainsi que la courbure du champ magnétique changent de façon importante l'opérateur \mathcal{D}_A . Nous constatons de plus que le couplage de la composante alfvénique du déplacement avec sa composante ξ_{\parallel} — que nous assimilerons à la composante magnétosonique du déplacement — se fait par l'intermédiaire de la courbure : $\mathcal{C}_A \propto \mathcal{K}_{cA}$.

4.6 Équation du mouvement parallèle

Une fois que nous avons calculé les composantes parallèles de la force de Lorentz (4.10) et de la force de pression (4.9), nous sommes en mesure d'écrire complètement l'équation du mouvement du plasma suivant les lignes de champ magnétique d'équilibre :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = & - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \rho_0 V_S^2 \left[\left(\mathcal{K}_{cA} + \mathcal{K}_{bA} - \mathcal{K}_{\rho A} \right) \xi_A - \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} + \mathcal{K}_{b\parallel} \xi_{\parallel} - \mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} \right] \right\} \\ & + \rho_0 V_A^2 \left[\left(\vec{\mathcal{K}}_b - \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A + \left(\mathcal{K}_{bA} - \mathcal{K}_{cA} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right] + \rho_0 \mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi}). \end{aligned}$$

Après réorganisation des termes de l'équation ci-dessus, nous définissons les deux opérateurs de dispersion et de couplage parallèles, \mathcal{D}_{\parallel} et \mathcal{C}_{\parallel} , tels que :

$$\mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_0 V_S^2 \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} \right) \right], \quad (4.15)$$

puis

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A = & \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_0 V_S^2 \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A \right] \\ & + V_A^2 \left[\left(\vec{\mathcal{K}}_b - \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A + \left(\mathcal{K}_{bA} - \mathcal{K}_{cA} \right) \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ces notations introduites, nous pouvons formuler simplement l'équation du mouvement parallèle :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - \mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A + \mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi}). \quad (4.17)$$

Cette relation s'identifie à l'équation de dispersion d'un mode magnéto-sonique lent, se propageant dans un plasma hétérogène, en champ magnétique courbe et de façon quasi-perpendiculaire aux lignes du champ d'équilibre.

4.7 Propriétés des équations de dispersion

En conclusion, nous remarquons que les équations de dispersion alfvénique (4.14) et magnéto-sonique (4.17) sont établies indépendamment de la forme des modes considérés ; elles requièrent seulement, d'une part des variations spatiales suivant \vec{e}_l très rapides devant celles suivant \vec{e}_\parallel et \vec{e}_A , d'autre part que ξ_l soit petit devant ξ_\parallel et ξ_A , dans le même rapport que les variations spatiales.

En outre, nous remarquons que les équations sont globales suivant les lignes de champ magnétique — elles font d'ailleurs seulement intervenir des dérivations parallèles au champ magnétique non perturbé — et qu'à ce stade, aucune approximation WKB, ni aucune transformation de Fourier n'ont été faites.

Pour terminer, notons que la troisième équation de dispersion, portant sur les ondes magnéto-soniques rapides, a été éliminée du cadre d'étude à travers la conservation de la pression totale du plasma, découlant directement de l'ordering imposé.

Chapitre 5

Cas d'un équilibre MHD pur

Sommaire

5.1	Échelles caractéristiques	84
5.2	Récriture des équations du mouvement	84
5.3	Cas de perturbations incompressibles	87
5.4	Mécanisme de l'instabilité	88
5.5	Variations parallèles des perturbations	91
5.6	Effets de géométrie	92

Les études portant sur l'instabilité de ballooning se placent dans le cadre d'un équilibre MHD pur, ou encore pression-tension, lorsque les forces extérieures au plasma ou ses mouvements non perturbatifs peuvent être négligés. C'est bien entendu le cas dans le contexte de la recherche sur la fusion contrôlée (Coppi *et al.*, 1979; Dewar & Glasser, 1983), mais, ainsi que le montre la synthèse de Ferrière *et al.* (1999), c'est également ce cadre conceptuel qui est généralement considéré en physique spatiale dans les études des magnétosphères (Miura *et al.*, 1989; Liu, 1997), voire en physique solaire lorsque l'influence du ballooning dans l'activité de la couronne solaire est évaluée (Hardie *et al.*, 1991).

Par équilibre MHD pur, on entend l'équilibre d'un plasma dont la dynamique est contrôlée par les seules forces de pression thermique et de Lorentz. Ces équilibres sont dus à une compétition entre la force de pression totale (somme des pressions thermique et magnétique) qui favorise la détente du plasma et la force de tension magnétique qui a contrario tend à le confiner.

Les équilibres pression-tension présentent un grand intérêt car ils apportent de nombreuses simplifications dans le traitement des équations de dispersion ballooning. Premièrement, ils permettent de se focaliser sur le cœur du mécanisme instable en restreignant le contexte physique à celui déjà très vaste de la MHD, sans traiter le couplage des modes de ballooning avec d'autres modes tels que des ondes de gravités ou des ondes inertielles voire des modes magnéto-rotationnels. Puis, de part sa nature, la force de Lorentz introduit dans ces équilibres MHD des invariances qui simplifient considérablement la formulation mathématique du problème.

5.1 Échelles caractéristiques

Les trois échelles caractéristiques que nous avons définies dans la section 4.1 interviennent dans ce problème. $\vec{\mathcal{K}}_\rho$ et $\vec{\mathcal{K}}_b$ ordonnent les gradients de pression thermique et magnétique alors que $\vec{\mathcal{K}}_c$ mais aussi $\vec{\mathcal{K}}_b$ déterminent l'efficacité du confinement magnétique. Nous devons de plus considérer un quatrième paramètre, $\beta = C_S^2/V_A^2 \propto P_{th}/P_m$ qui mesure l'importance relative de la matière et du champ magnétique dans la dynamique du plasma.

Le lien entre ces quatre paramètres est déterminé par la relation fondamentale de la dynamique et l'équation d'état appliquées à la structure d'équilibre ; nous rappelons les relations obtenues dans la section 2.1 :

$$\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho = \vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b\perp}, \quad (5.1)$$

$$\vec{\mathcal{K}}_\rho = \gamma \vec{\mathcal{K}}_p. \quad (5.2)$$

La force de Lorentz n'agit que perpendiculairement aux lignes de champ magnétique ; il est alors évident que la stratification de pression et donc de densité ne va se faire que dans cette direction transverse. Cela signifie que dans le cas présent d'un équilibre MHD pur — sans champ de force d'origine externe, ni mouvement d'ensemble — la pression thermique et la densité — et par conséquent la vitesse du son — sont des quantités invariantes le long des lignes de \vec{B}_o . En revanche, les variations parallèles du champ magnétique ne sont pas fixées a priori par l'équilibre. Nous en déduisons donc que contrairement à $\vec{\mathcal{K}}_b$ les vecteurs $\vec{\mathcal{K}}_\rho$, $\vec{\mathcal{K}}_p$ ainsi que $\vec{\mathcal{K}}_c$ — par construction — ne possèdent pas de composante parallèle.

5.2 Réécriture des équations du mouvement

Cette partie va nous conduire à récrire partiellement les équations du mouvement, compte tenu des simplifications qu'apportent les invariances suivant les lignes de champ magnétique, provenant de l'hypothèse d'équilibre pression-tension.

5.2.1 Identité remarquable

Afin d'avoir une meilleure lisibilité de l'équation du mouvement parallèle nous allons établir une identité remarquable qui va nous permettre de rendre compte clairement du couplage entre les modes de perturbation alfvénique et magnéto-sonique lent.

Pour cela nous cherchons à évaluer la quantité $\frac{\partial}{\partial s}(P_o \mathcal{K}_{pA})$ que nous récrivons dans la notation d'Einstein comme :

$$\begin{aligned} (\vec{\epsilon}_\parallel \cdot \nabla) (\vec{\epsilon}_A \cdot \nabla P_o) &= \epsilon_\parallel^i \partial_i (\epsilon_A^j \partial_j P_o) \\ &= \epsilon_\parallel^i \partial_i \epsilon_A^j \partial_j P_o + \epsilon_A^j \epsilon_\parallel^i \partial_i \partial_j P_o, \end{aligned}$$

où les ϵ_\parallel^i et ϵ_A^j sont les composantes cartésiennes respectives de $\vec{\epsilon}_\parallel$ et $\vec{\epsilon}_A$. Étant donné ce choix de passage en coordonnées cartésiennes, nous pouvons simplement permuter les opérateurs

de dérivation ∂_i et ∂_j dans la dérivée seconde de la pression thermique pour obtenir :

$$e_{\parallel}^i \partial_i \partial_j P_o = e_{\parallel}^i \partial_j \partial_i P_o = \partial_j \left(e_{\parallel}^i \partial_i P_o \right) - \partial_i P_o \partial_j e_{\parallel}^i.$$

Or, comme nous l'avons montré, dans les équilibres considérés la pression est invariante le long des lignes de champ magnétique, ainsi $e_{\parallel}^i \partial_i P_o$ est nul. L'expression que nous cherchons devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (P_o \mathcal{K}_{pA}) &= e_{\parallel}^i \partial_i e_A^j \partial_j P_o - \partial_i P_o \partial_j e_{\parallel}^i \\ &= P_o \vec{\mathcal{K}}_p \cdot \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla \vec{e}_A - \vec{e}_A \cdot \nabla \vec{e}_{\parallel} \right). \end{aligned}$$

Si nous sortons la pression de la dérivée longitudinale du membre de gauche, nous aboutissons à la relation suivante, portant indifféremment sur $\vec{\mathcal{K}}_p$ ou $\vec{\mathcal{K}}_{\rho}$:

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{K}_{\rho A} = \vec{\mathcal{K}}_{\rho} \cdot \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla \vec{e}_A - \vec{e}_A \cdot \nabla \vec{e}_{\parallel} \right); \quad (5.3)$$

elle traduit simplement la variation du profil de densité suivant \vec{e}_A , lorsque l'on se déplace le long des lignes de champ et que celles-ci subissent des déformations de volume (détaillées dans l'annexe C).

5.2.2 Terme de couplage parallèle

Le résultat intermédiaire précédent va conduire à des simplifications dans le terme de couplage \mathcal{C}_{\parallel} défini en (4.16). En effet, dans celui-ci intervient la quantité $(\vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_b) \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A$ qui suivant (5.1) se résume dans le cadre présent à :

$$\vec{\mathcal{K}}_{\rho} \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A = \vec{\mathcal{K}}_{\rho} \cdot \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla \vec{e}_A - \vec{e}_A \cdot \nabla \vec{e}_{\parallel} \right) \xi_A,$$

par définition de Γ^- en (B.23). Le terme de gauche se simplifie alors au moyen de l'identité (5.3) pour donner :

$$\vec{\mathcal{K}}_{\rho} \cdot \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_A = \xi_A \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{K}_{\rho A}. \quad (5.4)$$

Le couplage déterminé en (4.16) devient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A &= \frac{\partial}{\partial s} \left[V_S^2 \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A \right] - V_A^2 \left[\beta \xi_A \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{K}_{\rho A} + \beta \vec{\mathcal{K}}_{\rho} \cdot \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right] \\ &= C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A - \mathcal{K}_{\rho A} \xi_A \right]. \end{aligned}$$

Après quelques opérations élémentaires nous trouvons finalement, comme pour le mode alfvénique (4.12), que le couplage du mode magnéto-sonique lent avec la perturbation alfvénique se fait via la courbure :

$$\mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A = -C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2}{1 + \beta} \mathcal{K}_{cA} \xi_A \right). \quad (5.5)$$

Ceci signifie que, sans la courbure, les modes d'Alfvén et magnétosonique lent évolueraient indépendamment l'un de l'autre. Bien entendu l'équation de dispersion de ces ondes — et donc leur vitesse de propagation — se trouverait tout de même changée par les hétérogénéités du plasma. En revanche, en présence d'un champ magnétique courbe le mode magnétosonique agit sur l'évolution du mode alfvénique qui rétro-agit sur le mode lent ; ces couplages sont inversement proportionnels au rayon de courbure.

5.2.3 Équation du mouvement parallèle

Les invariances introduites par l'hypothèse d'équilibre pression-tension ainsi que la relation (5.1) entre les différentes échelles spatiales caractéristiques du problème donnent une expression simplifiée de la divergence du déplacement (4.5) :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{1+\beta} \left[-2\mathcal{K}_{c_A} \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right]. \quad (5.6)$$

Or, si nous reconsidérons l'équation du mouvement parallèle (4.17) compte tenu des propriétés inhérentes aux équilibres MHD, nous pouvons utiliser la formulation (5.5) de l'opérateur \mathcal{C}_{\parallel} mais également simplifier l'expression (4.15) de l'opérateur \mathcal{D}_{\parallel} pour aboutir à :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1+\beta} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right] - C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2}{1+\beta} \mathcal{K}_{c_A} \xi_A \right).$$

Nous voyons maintenant apparaître dans le terme de dérivée spatiale la divergence du vecteur déplacement calculée en (5.6) :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - C_S^2 \frac{\partial}{\partial s} \nabla \cdot \vec{\xi} = 0. \quad (5.7)$$

5.2.4 Équation du mouvement alfvénique

De même que pour l'équation magnétosonique lente, l'application des propriétés d'invariance de la pression et de la densité aux opérateurs de l'équation du mouvement alfvénique — \mathcal{C}_A et \mathcal{D}_A définis en (4.12) et (4.11) — permet de faire apparaître la divergence du déplacement. En effet, l'équation (4.14) devient dans ce contexte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} = V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \xi_A + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \frac{\partial \xi_A}{\partial s} + \left(\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right) \xi_A \right] \\ + 2 V_S^2 \mathcal{K}_{c_A} \left[\left(\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} \right) \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} \right], \end{aligned}$$

et nous pouvons revoir le second terme du membre de droite comme :

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} \right) \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel} &= \underbrace{\left(\mathcal{K}_{\rho_A} + \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} \right)}_{(1+\beta) \mathcal{K}_{\rho_A}} \xi_A \\ &\quad \underbrace{- 2 \mathcal{K}_{c_A} \xi_A + \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \right) \xi_{\parallel}}_{(1+\beta) \nabla \cdot \vec{\xi}}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation alfvénique devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial s} + 2\beta \mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right] \xi_A = 2 C_S^2 \mathcal{K}_{c_A} \nabla \cdot \vec{\xi}. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Soit encore, d'après la définition (B.33) de la fluctuation de pression :

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} \right] \xi_A = 2 \rho_b \mathcal{K}_{c_A} \delta P. \quad (5.9)$$

5.3 Cas de perturbations incompressibles

Il est intéressant de noter que les déplacements ξ_{\parallel} et ξ_A — dont les évolutions dans le temps sont données respectivement par (5.7) et (5.8) — sont liés l'un à l'autre uniquement par la compression du plasma. Nous pouvons nous demander s'il est possible de faire évoluer les perturbations indépendamment dans les deux directions, en considérant des déplacements incompressibles. Cette hypothèse se traduit simplement par l'annulation de la divergence de $\vec{\xi}$:

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0. \quad (5.10)$$

Nous avons déjà vu que l'ordering du ballooning appliqué aux équations linéarisées de la MHD impose aux perturbations du plasma d'évoluer de manière à conserver la pression totale de la matière à l'ordre dominant. Cette propriété, ainsi que les équations d'évolution de ξ_A et ξ_{\parallel} , déterminent complètement l'évolution des écarts à l'équilibre.

Or, à présent, nous introduisons une contrainte supplémentaire et il n'est a priori absolument pas évident qu'elle soit compatible avec les solutions du problème. Effectivement, on montre très simplement que la considération de perturbations incompressibles est en fait une hypothèse qui sur-contraint le système.

À travers la relation (5.7) déterminant l'évolution temporelle du déplacement parallèle nous voyons immédiatement que celui-ci doit rester nul :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = 0 \implies \xi_{\parallel} = 0. \quad (5.11)$$

Ceci signifie que dans le cas d'un plasma incompressible à l'ordre dominant, la matière ne se déplace pas suivant les lignes de champ magnétique d'équilibre mais n'est soumise qu'à un mouvement transverse.

Par ailleurs, nous avons établi une expression de la divergence du déplacement à travers la relation (5.6), dont il découle que l'évolution incompressible du plasma peut avoir lieu, dans le cadre actuel, seulement si le vecteur de courbure est négligeable à l'ordre ε , c'est-à-dire dans le cas de rayons de courbure très grands devant les autres échelles spatiales caractéristiques :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0 \iff \mathcal{K}_{cA} = 0 + o(\varepsilon^1). \quad (5.12)$$

La relation d'équilibre se résume alors à :

$$\beta \mathcal{K}_{\rho A} = -\mathcal{K}_{bA}. \quad (5.13)$$

Elle traduit le fait que les grands rayons de courbure imposés par (5.10) produisent une force de tension magnétique trop faible pour participer à l'équilibre dynamique ; le confinement de la matière est alors assuré uniquement par la pression thermique, ce qui constitue une configuration complètement étrangère à celle dont nous sommes partis.

Bien que, d'après le principe d'énergie (A.18), les perturbations incompressibles soient a priori les plus instables — dans le cas contraire une fraction de l'énergie potentielle disponible est dissipée en énergie interne via la compression et ne peut donc nourrir l'instabilité — ces modes d'évolution des fluctuations ne sont pas obligatoirement permis dans un cadre de calcul donné ; c'est en particulier le cas ici où l'évolution des modes de perturbation comprime nécessairement le plasma.

5.4 Mécanisme de l'instabilité

Les perturbations que nous étudions évoluent de façon quasi-statique car l'équilibre des pressions totales entre un élément fluide perturbé et son environnement est assuré en permanence par les ondes magnéto-soniques rapides. Par conséquent, les forces de pression perpendiculaires aux lignes de champ sont nulles et l'origine de la déstabilisation du milieu provient nécessairement de la variation de la force de tension magnétique. Nous allons donc nous intéresser plus précisément à cette force afin de distinguer dans quelle mesure elle assure un confinement stable du plasma ; cependant, au vu de son expression (4.13) provenant de (4.11) et (4.12), il n'est pas a priori évident de conclure du sens de la force dans un cas général.

Afin d'extraire seulement le moteur des instabilités de pression nous allons dans un premier temps choisir une configuration magnétique excluant les effets de géométrie liés aux coefficients Γ_{AA}^+ et $\left(\Gamma^+ \Gamma^-\right)_{AA}$, ainsi que les variations du champ magnétique suivant \vec{e}_\parallel . Il semble également logique de considérer des variations parallèles très lentes devant l'échelle de courbure des lignes de champ magnétique, afin de supprimer un effet qui stabilise obligatoirement le milieu — produit par le terme $\partial^2 \xi_A / \partial s^2$.

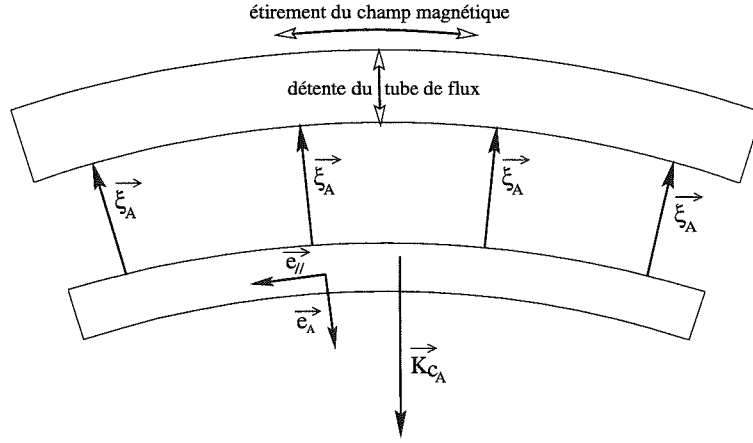


FIG. 5.1 – *Déplacement compressible d'un tube de flux magnétique, mais sans modification de son rayon de courbure.*

Dans ce contexte dépouillé, représenté sur la figure 5.1, l'équation d'évolution (5.7) montre que les perturbations produisent un mouvement parallèle négligeable $\xi_{||} \sim 0$ (contrôlé par les variations parallèles de la divergence de $\vec{\xi}$), mais qu'elles sont néanmoins compressibles ; d'après l'équation (5.6), la divergence du déplacement s'exprime :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{-2}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA} \xi_A. \quad (5.14)$$

Finalement, l'équation d'évolution Alfvénique (5.8), indépendante de l'équation parallèle, se résume à :

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} = V_A^2 \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} - 4 \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 \right) \xi_A. \quad (5.15)$$

On voit donc de façon évidente que la fluctuation de tension accompagne le déplacement et ne joue donc plus le rôle d'une force de rappel, lorsqu'à la fois le produit de \mathcal{K}_{cA} par $\mathcal{K}_{\rho A}$ est positif (c'est-à-dire lorsque la tension magnétique confine le plasma) et que les échelles caractéristiques vérifient :

$$\mathcal{K}_{\rho A} > \frac{2}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA} \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_{cA} \text{ et } \mathcal{K}_{\rho A} > 0; \quad (5.16)$$

une structure de confinement magnétique caractérisée par de telles valeurs de $\mathcal{K}_{\rho A}$, \mathcal{K}_{cA} et β est alors instable. Il apparaît clairement que les instabilités de pression constituent un problème de gradient critique : le milieu devient instable si la densité ou la pression thermique varie sur une échelle trop petite devant l'échelle de courbure.

L'origine mécanique de l'instabilité devient à présent évidente. En l'absence de tout terme géométrique et en supposant la direction parallèle invariante (ou variant lentement), la relation (B.32) montre que la tension magnétique se réduit simplement à :

$$\delta T_A = 2\rho_0 V_A^2 \mathcal{K}_{cA} \delta b_{||}, \quad (5.17)$$

qui ne dépend que de la fluctuation du champ magnétique parallèle car sa variation perpendiculaire est nulle dans le cas considéré. Comme le montre la relation (B.21), δ_{\parallel} a trois causes que nous pouvons comprendre aisément dans le contexte présenté sur la figure 5.1 où $\xi_A < 0$: un terme d'élongation de la ligne de champ magnétique $-\mathcal{K}_{c_A}\xi_A$, qui augmente le rayon de courbure et fait croître δ_{\parallel} , un terme de détente $-\nabla_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp}$, qui au contraire, d'après (5.14), va diminuer la tension magnétique, puis un terme d'advection $-\mathcal{K}_{b_A}\xi_A$, qui, suivant le signe de \mathcal{K}_{b_A} , peut accroître ou décroître la perturbation de tension magnétique.

Suivant que le terme de détente est prépondérant ou non sur l'augmentation, par son étirement, du champ magnétique parallèle, mais également suivant le signe de \mathcal{K}_{b_A} , le plasma sera stable ou instable. Or, étant donné que la pression totale reste constante, ces trois quantités ne sont pas indépendantes ; de cette propriété on peut en particulier déduire l'expression de $\nabla_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp}$ (4.4) puis celle de δ_{\parallel} (4.6) que l'on réécrit comme :

$$\delta_{\parallel} = \frac{\beta}{1+\beta} (\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) \xi_A \quad (5.18)$$

$$= \beta \left(\mathcal{K}_{\rho_A} - \frac{2}{1+\beta} \mathcal{K}_{c_A} \right) \xi_A, \quad (5.19)$$

où l'on reconnaît le critère d'instabilité (5.16) des modes de pression.

En outre, nous remarquons que pour $\beta = 1$, l'accroissement de δ_{\parallel} par son élongation compense exactement sa diminution produite par la dilatation du tube de flux :

$$-\nabla_{\perp} \cdot \vec{\xi}_{\perp} = \mathcal{K}_{c_A} \xi_A;$$

cela montre que le transport du champ magnétique, $-\mathcal{K}_{b_A}\xi_A$, devient potentiellement le seul terme moteur de la déstabilisation quand β est plus grand que l'unité.

Lorsqu'on l'associe à la condition $\mathcal{K}_{c_A}\mathcal{K}_{\rho_A} > 0$, la relation (5.16) est une condition nécessaire et suffisante d'instabilité d'une structure magnétique. Toutefois, elle ne nous dit rien sur le profil \mathcal{K}_{b_A} du champ magnétique qui découle de l'équilibre dynamique (5.1). Cette relation d'équilibre permet cependant de récrire la condition d'instabilité des modes de pression, soit en termes de \mathcal{K}_{ρ_A} et \mathcal{K}_{b_A} , soit en termes de \mathcal{K}_{c_A} et \mathcal{K}_{b_A} :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_{c_A} \text{ et } \mathcal{K}_{\rho_A} > 0, \\ \mathcal{K}_{b_A} < \frac{1-\beta}{2} \mathcal{K}_{\rho_A}, \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{K}_{c_A} \text{ et } \mathcal{K}_{\rho_A} > 0, \\ \mathcal{K}_{b_A} < \frac{1-\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{c_A}, \end{cases} \quad (5.20)$$

Ces deux critères montrent simplement que, pour des valeurs de $\beta < 1$, les plasmas à \mathcal{K}_{b_A} négatif sont obligatoirement instables car, lorsque le champ magnétique est dominant, la dilatation seule d'un tube de flux lors de son déplacement contrebalance son élongation et ainsi déstabilise le milieu ; un profil de champ magnétique à $\mathcal{K}_{b_A} < 0$ n'introduit qu'un effet déstabilisant supplémentaire. En revanche, si $\beta > 1$ l'importance de la pression thermique rend les tubes de flux moins compressibles ; la déstabilisation ne peut alors plus se faire que par l'advection $-\mathcal{K}_{b_A}\xi_A$ et nécessite d'avoir \mathcal{K}_{b_A} négatif — cela signifie que la pression et la tension magnétique confinent toutes deux le plasma.

5.5 Variations parallèles des perturbations

Lorsque les modes de perturbation que l'on considère possèdent des variations parallèlement au champ magnétique, le critère (5.16) se réduit simplement à :

$$\mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} > 0. \quad (5.21)$$

À la différence de la configuration traitée dans la section 5.4, le moteur de la déstabilisation n'est plus ici la composante δT_A de la force de tension magnétique mais sa composante parallèle. Ainsi que nous le schématisons sur la figure 5.2, lorsque l'on déplace le plasma, confiné par la tension magnétique, le long des lignes de champ, la force δT_{\parallel} accompagne le flot de matière et ainsi le déstabilise. Le déplacement ξ_{\parallel} croît donc linéairement dans le temps et induit également une croissance du déplacement ξ_A via le couplage des équations magnéto-sonique et alfvénique.

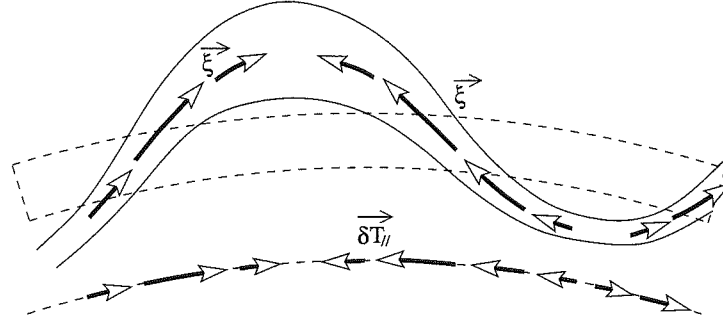


FIG. 5.2 – Une compression parallèle aux lignes de champ magnétique déstabilise un plasma confiné par la tension magnétique.

Contrairement au mécanisme présenté en l'absence de variation des perturbations parallèlement au champ magnétique d'équilibre, dans le cas présent, il est difficile de faire apparaître l'instabilité dans les équations d'évolution du déplacement. Toutefois, dans le chapitre 6, qui consiste en une application du système du ballooning à une structure cylindrique, nous dérivons, entre autres, l'équation de dispersion des modes dont le critère d'instabilité est (5.21).

Par ailleurs, ce critère s'obtient simplement dans la limite où k_{\parallel} tend vers zéro — si nous raisonnons sur des modes $\exp[i(k_{\parallel}s - \omega t)]$. Pour cela, nous récrivons l'équation alfvénique (5.7), sans les termes géométriques, comme :

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - V_A^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} - 4 \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 \right) \xi_A = 2 V_S^2 \mathcal{K}_{cA} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s}, \quad (5.22)$$

tandis qu'en introduisant la force de tension parallèle — obtenue en combinant la force de Lorentz (B.28) avec la force de pression magnétique $-\nabla(\rho V_A^2 \delta \mathcal{B}_{\parallel})$:

$$\delta T_{\parallel} = \rho_v V_A^2 \left[\vec{\delta}_{\perp} \cdot (\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} - \vec{\mathcal{K}}_c) + \frac{\partial \delta \mathcal{B}_{\parallel}}{\partial s} + 2 \mathcal{K}_{b\parallel} \delta \mathcal{B}_{\parallel} \right],$$

on obtient une relation équivalente à (5.8) :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = V_A^2 \left\{ -\beta \mathcal{K}_{\rho_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} - 2 \frac{\beta}{1+\beta} \right) \xi_A + \frac{\beta}{1+\beta} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \right] \right\}, \quad (5.23)$$

dans laquelle nous avons remplacé, respectivement, $\vec{\mathcal{B}}_{\perp}$ et \mathcal{B}_{\parallel} par (4.8) et (4.6), en omettant les termes géométriques.

Nous effectuons alors un développement à k_{\parallel} fini sur un mode de pulsation nulle en l'absence de variation parallèle de $\vec{\xi}$; l'équation sur ξ_{\parallel} montre directement que $\xi_A \sim k_{\parallel} \xi_{\parallel}$:

$$\omega^2 \xi_{\parallel} = i k_{\parallel} V_A^2 \left\{ \beta \mathcal{K}_{\rho_A} \xi_A - \left[\left(\beta \mathcal{K}_{\rho_A} - 2 \frac{\beta}{1+\beta} \right) \xi_A + i \frac{\beta}{1+\beta} k_{\parallel} \xi_{\parallel} \right] \right\}.$$

L'équation alfvénique devient alors trivialement :

$$\left(2 \beta \mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A} - 4 \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{c_A}^2 \right) \xi_A = -2i \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} \xi_{\parallel};$$

elle montre clairement qu'au premier ordre en k_{\parallel} les perturbations de pression thermique, de champ magnétique parallèle ainsi que $\delta \Gamma_A$, toutes trois proportionnelles, sont négligeables. Nous récrivons alors la relation magnétozonique comme :

$$\omega^2 = i k_{\parallel}^2 \mathcal{K}_{\rho_A} \xi_A C_S^2 = -2\beta \frac{\mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A}}{k_o^2} k_{\parallel}^2 V_S^2,$$

où $k_o^2 = -2 \beta \mathcal{K}_{c_A} \mathcal{K}_{\rho_A} + 4 \mathcal{K}_{c_A}^2 \beta / (1+\beta)$. Ce calcul de ω^2 montre que cette branche de solution est instable, dans un plasma confiné par la tension magnétique — i.e. qui vérifie (5.21) — lorsque k_o^2 est positif — c'est-à-dire, lorsque la branche de solution dont le critère est donné par (5.16) est stable. L'instabilité n'est pas produite par la variation de tension perpendiculaire — due à la fluctuation de champ magnétique parallèle — mais par la variation de tension parallèle — liée à la fluctuation de champ magnétique perpendiculaire — à travers le terme $\mathcal{K}_{\rho_A} \vec{\mathcal{B}}_{\perp} \propto \mathcal{K}_{\rho_A} \partial \xi_A / \partial s$.

5.6 Effets de géométrie

Le critère que nous avons mis en évidence dans la section précédente s'applique aux modes d'interchange; le ballooning nécessite d'avoir des régions à courbures favorable et défavorable aux instabilités de pression. Pour comprendre son mécanisme, il faut donc maintenant prendre en considération les termes liés à la géométrie des lignes de champ; pour cela, nous allons considérer les hétérogénéités de l'équilibre parallèlement au champ magnétique non perturbé. Toutefois, pour les mêmes raisons que précédemment, nous allons à nouveau ignorer les variations parallèles des perturbations.

La stabilité du milieu dépend toujours uniquement du signe de la variation de tension magnétique (les forces de pression totale transverses sont constantes); les conclusions auxquelles nous avons abouti dans la section précédente restent évidemment valables, cependant,

compte tenu des effets de géométrie, les perturbations vont à présent développer des fluctuations de champ magnétique perpendiculaire, données par (4.7) et (4.8), liées aux tenseurs Γ^\pm — la signification des composantes de ces tenseurs est donnée en annexe C. Suivant le sens de la perturbation du champ magnétique perpendiculaire et ses variations parallèles produites par celles de l'équilibre, la modification de la force de tension, à travers la courbure, peut devenir déstabilisante.

La relation (5.8) montre que les termes géométriques seuls peuvent déstabiliser le milieu lorsque :

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^- + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} > 0.$$

Afin de distinguer les mécanismes de déformation volumique des tubes de champ des mécanismes de cisaillement, nous allons, dans cette section, considérer \vec{e}_l comme une direction d'invariance ; ainsi, d'après la définition (B.23), le terme $\left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA}$ se résume au produit $\Gamma_{AA}^+ \Gamma_{AA}^- = - \left(\Gamma_{AA}^- \right)^2$, toujours stabilisant.

En revanche, comme le montre la figure 5.3, le terme $\mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^-$ est lui toujours déstabilisant. Cette propriété découle de la conservation du flux magnétique : lorsque l'on parcourt les lignes

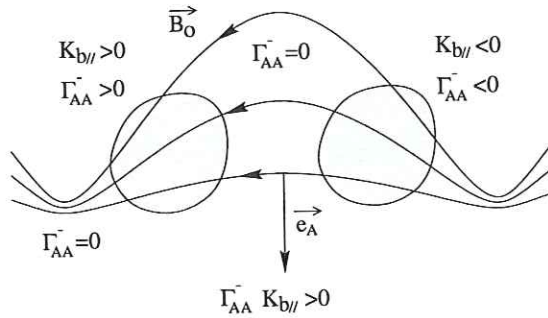


FIG. 5.3 – Dans les régions où $\Gamma_{AA}^- \neq 0$, que les lignes de champ magnétique s'évasent ou se concentrent, le terme $\mathcal{K}_{b\parallel} \Gamma_{AA}^-$ est toujours déstabilisant.

de champ suivant \vec{e}_l , si elles s'évasent ($\Gamma_{AA}^- < 0$) le champ magnétique moyen diminue et $\mathcal{K}_{b\parallel} < 0$, mais inversement, lorsqu'elles convergent ($\Gamma_{AA}^- > 0$) le champ magnétique augmente d'où $\mathcal{K}_{b\parallel} > 0$ — en définitive, on remarque que Γ_{AA}^- et $\mathcal{K}_{b\parallel}$ sont de même signe.

La condition de déstabilisation par les termes géométriques peut donc se récrire :

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^- + \Gamma_{AA}^- \left(\mathcal{K}_{b\parallel} - \Gamma_{AA}^- \right) > 0, \quad (5.24)$$

ce qui montre que le plasma peut être déstabilisé lorsque $|\mathcal{K}_{b\parallel}| > |\Gamma_{AA}^-|$ — par ailleurs $\mathcal{K}_{b\parallel}$ et Γ_{AA}^- sont étroitement corrélés à travers la conservation du flux magnétique le long des tubes de champ.

Un autre facteur d'instabilité, produit par la géométrie, découle des variations parallèles des déformations volumiques des tubes de flux ; en effet, la relation (5.24) montre que $\partial \Gamma_{AA}^- / \partial s > 0$ facilite la déstabilisation du plasma. La figure 5.4 présente les régions, telles que $\Gamma_{AA}^- = 0$, stabilisées ou déstabilisées par cet effet ; on remarque que l'instabilité du plasma est associée à la dilution du flux magnétique : les parties de la structure MHD où le champ

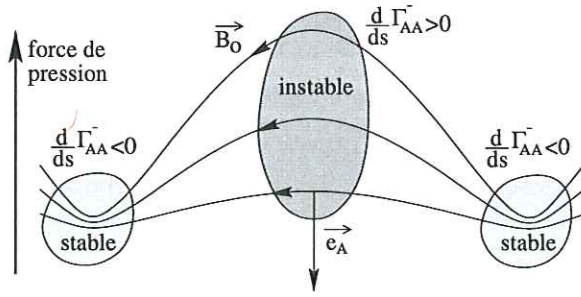


FIG. 5.4 – Dans les régions où $\Gamma_{AA}^- = 0$, la déstabilisation géométrique ne peut provenir que des variations parallèles des déformations volumiques. Les zones où le flux magnétique est dilué sont instables, tandis que celles où le flux est concentré sont stables.

moyen est maximal sont stables, tandis que celles où il atteint son minimum sont instables. Il est important de noter que ces régions stables (respectivement instables) correspondent également à des régions où la courbure est défavorable (respectivement favorable) à la croissance des modes d'interchange. Les modes qui se développent alors présentent les caractéristiques des modes localisés de ballooning.

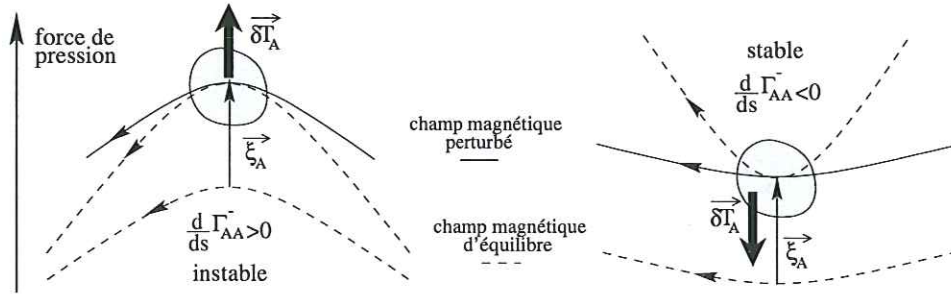


FIG. 5.5 – Influence de la variation du rayon de courbure magnétique sur la stabilité du plasma dans les régions où $\Gamma_{AA}^- = 0$.

L'origine mécanique de la déstabilisation par $\partial\Gamma_{AA}^-/\partial s$ est expliquée sur la figure 5.5; lorsque l'on déplace une ligne de champ magnétique, la variation de courbure induite par le champ magnétique perpendiculaire détermine la stabilité du plasma : si le rayon de courbure augmente le plasma est instable et réciproquement s'il diminue le milieu est stable.

L'effet des termes de cisaillement des lignes de champ magnétique, non traité dans cette section, sera présenté en même temps que l'étude de la stabilité d'un jet de matière vis-à-vis des instabilités de pression, dans le chapitre 6.

Chapitre 6

Déstabilisation des jets par instabilité de pression

Sommaire

6.1	Équilibre cylindrique sans rotation	95
6.2	Rotation solide	103
6.3	Analyse des critères d'instabilité	107
6.4	Conclusion	111

Dans les chapitres précédents, nous avons établi les équations de la MHD dans le cadre d'un plasma hétérogène soumis à l'action d'un champ magnétique courbe en respectant un ordering particulier, appelé ordering ballooning. La première application astrophysique de ces équations que nous avons souhaitée développer consiste à étudier la stabilité d'un modèle simplifié de jet vis-à-vis d'une instabilité de d'interchange. Nous considérons la partie asymptotique du jet — telle que le mouvement poloïdal de la matière devient quasiment balistique (Ferreira, 1997) — comme un écoulement magnétisé homogène, de structure cylindrique, pourvu d'un mouvement de rotation solide.

6.1 Équilibre cylindrique sans rotation

6.1.1 Géométrie du système

Dans un premier temps, nous assimilons le jet de matière à une structure cylindrique, axisymétrique, invariante suivant l'axe et sans rotation ; de plus, nous nous plaçons dans le référentiel en mouvement avec le flot uniforme afin que le plasma non perturbé soit immobile.

Dans ce cadre particulier, les lignes de champ magnétique sont enroulées en hélice autour de l'axe du jet et ne s'évasent pas — le champ magnétique radial est nul, la composante poloïdale se résume donc à B_{ϕ} . Sur la figure 6.1 nous représentons leur géométrie, telle que nous la considérons dans le calcul ; le champ magnétique qui s'exprime comme :

$$\vec{B}_\phi = B_\phi \vec{e}_\phi = B_{\phi\theta} \vec{e}_\theta + B_{\phi z} \vec{e}_z,$$

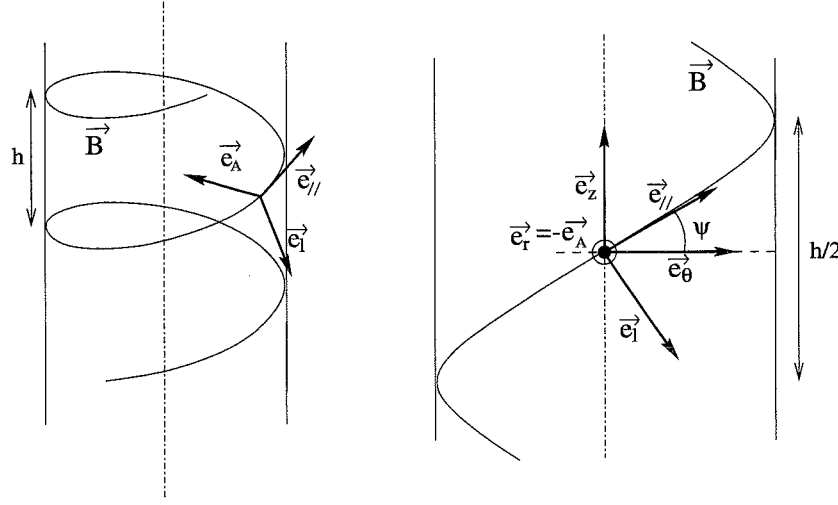


FIG. 6.1 – Différentes vues des lignes de champ magnétique de la structure cylindrique. Nous définissons également la base dans laquelle les calculs sont effectués.

est invariant sur une surface du cylindre (surface magnétique) et ne dépend que du rayon r . Il en va de même pour l'angle de pitch ψ et le pas de l'hélice h . On les définit par :

$$\tan \psi = \frac{B_{\theta z}}{B_{\theta \theta}} \iff \begin{cases} B_{\theta \theta} = B_o \cos \psi, \\ B_{\theta z} = B_o \sin \psi, \end{cases}$$

pour l'angle de pitch ; puis, en considérant un élément différentiel de longueur donné par $d\vec{s} = r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$, suivant une ligne de champ, nous pouvons écrire :

$$d\vec{s} \times \vec{B}_o \implies dz = \frac{B_{\theta z}}{B_{\theta \theta}} r d\theta,$$

que nous intégrons entre $[0, 2\pi]$ pour calculer le pas de l'hélice :

$$h = 2\pi r \frac{B_{\theta z}}{B_{\theta \theta}} = 2\pi r \tan \psi. \quad (6.1)$$

6.1.2 Équations de dispersion

Une fois la géométrie du système établie, nous pouvons calculer l'ensemble des coefficients intervenant dans les équations de dispersion des modes ballooning (4.14) et (4.17). Ces calculs portent sur les différentes échelles physiques définies par les coefficients $\vec{\mathcal{K}}$ — dont les composantes \mathcal{K}_\parallel sont par définition nulles — ainsi que sur les tenseurs géométriques Γ^\pm ; ils sont détaillés dans l'annexe D. Pour cela, nous travaillons dans la base $\{\vec{e}_\parallel, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}$, représentée sur la figure 6.1, telle que les vecteurs \vec{e}_\parallel et \vec{e}_l soient tangents aux surfaces magnétiques et que \vec{e}_A soit l'opposé de \vec{e}_r . Cette configuration n'est pas la plus générale que l'on puisse considérer (voir la section D.2), cependant, d'après les résultats du chapitre 5 ou du principe d'énergie (A.18), le système est d'autant plus instable que $\vec{\mathcal{K}}_c$, $\vec{\mathcal{K}}_\rho$ et $\vec{\xi}_A$ sont alignés. Or, dans cette configuration axisymétrique et invariante suivant z , $\vec{\mathcal{K}}_c$ et $\vec{\mathcal{K}}_\rho$ sont anti-parallèles à \vec{e}_r , d'où le choix de \vec{e}_A optimisant l'instabilité, le cas échéant.

Nous effectuons une décomposition en modes propres de la perturbation $\xi \propto \exp(-i\omega t)$, telle que nous l'avons décrite en annexe A. Compte tenu de l'invariance de l'équilibre le long des lignes de champ magnétique, l'équation de dispersion parallèle (4.17) s'écrit :

$$\left(\omega^2 + V_S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \xi_{\parallel} = [V_S^2 (\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}) + V_A^2 (\mathcal{K}_{b_A} \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A})] \frac{\partial \xi_A}{\partial s},$$

que l'on peut condenser en introduisant les relations $V_S^2 = V_A^2 \beta / (1 + \beta)$ et $\beta \mathcal{K}_{\rho_A} = \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}$:

$$\left(\omega^2 + V_S^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \xi_{\parallel} = 2 V_S^2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\partial \xi_A}{\partial s}. \quad (6.2)$$

Il en va de même pour la relation (4.14) portant sur la composante alfvénique :

$$\left\{ \omega^2 + V_A^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} + 2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\beta}{1 + \beta} (\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) \right] \right\} \xi_A = 2 V_S^2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s},$$

dans laquelle nous définissons le paramètre k_o , tel que :

$$k_o^2 = - \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} + 2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\beta}{1 + \beta} (\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}), \quad (6.3)$$

dont le signe n'est pas a priori défini. On en déduit une relation synthétique sur ξ_A :

$$\left(\omega^2 + V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - k_o^2 V_A^2 \right) \xi_A = -2 V_S^2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \quad (6.4)$$

Les deux équations (6.2) et (6.4) sont pour l'instant établies en l'absence de rotation, il n'intervient donc aucune force autre que la pression totale et la tension magnétique.

Les équations de dispersion que nous avons dérivées dans le chapitre 4 — et donc celles dérivées ci-dessus — restent globales le long des lignes de champ magnétique, contrairement à la direction transverse suivant laquelle nous avons supposé des variations rapides — sans toutefois effectuer de développement WKB. Cependant, dans le cas présent, l'invariance que nous imposons sur les surfaces magnétiques permet d'effectuer des transformations de Fourier exactes, à la fois dans la direction du champ magnétique et dans la direction transverse \vec{e}_l , sans aucune perte de généralité :

$$\xi \propto \exp(i \Phi) \quad \text{avec} \quad \omega = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{et} \quad k_{\parallel} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}.$$

Les équations couplées en ξ_{\parallel} et ξ_A s'écrivent alors :

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2) \xi_{\parallel} = 2i \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 \xi_A, \quad (6.5)$$

$$(\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2) V_A^2) \xi_A = -2i \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 \xi_{\parallel}, \quad (6.6)$$

soit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2) & -2i \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 \\ 2i \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 & (\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2) V_A^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\parallel} \\ \xi_A \end{bmatrix} = 0.$$

Ce système linéaire possède une solution autre que la solution triviale si le déterminant de la matrice est nul :

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2) (\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2) V_A^2) - 4 \mathcal{K}_{cA}^2 k_{\parallel}^2 V_S^4 &= 0, \\ \omega^4 - [k_{\parallel}^2 (V_S^2 + V_A^2) + k_o^2 V_A^2] \omega^2 + k_{\parallel}^2 \left(k_{\parallel}^2 + k_o^2 - 4 \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 \right) V_S^2 V_A^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, ω est la solution d'une équation de dispersion relativement simple en définitive, compte tenu de sa forme bicarrée. En introduisant :

$$\begin{aligned} k_c^2 &= \frac{4\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 - k_o^2 \\ &= \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} + 2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où k_o^2 est donné par la relation (6.3), l'équation de dispersion se résume à :

$$\omega^4 - [k_{\parallel}^2 (V_S^2 + V_A^2) + k_o^2 V_A^2] \omega^2 + k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2) V_S^2 V_A^2 = 0. \quad (6.8)$$

6.1.3 Étude des racines

Afin de conclure sur la stabilité ou non d'un mode propre, nous devons étudier le signe des racines de l'équation de dispersion, conformément aux méthodes explicitées en annexe A. Pour l'équation (6.8), ces racines, notées ω_-^2 et ω_+^2 , s'expriment comme :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{V_A^2}{2} \left\{ \frac{1+2\beta}{1+\beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1+2\beta}{1+\beta} k_{\parallel}^2 + k_o^2 \right)^2 - \frac{4\beta}{1+\beta} k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2)} \right\}, \quad (6.9)$$

où l'on a remplacé V_S en fonction de V_A . Pour déterminer la nature réelle ou complexe des racines, nous procédons à l'étude du discriminant de la relation (6.8) que nous pouvons considérer comme un polynôme du second degré en k_o^2 . Au terme d'une série de calculs élémentaires, l'examen de son signe montre simplement que ce discriminant est strictement positif lorsque $k_{\parallel} < k_c$ — i.e. ω^2 est réel — tandis qu'il peut être positif ou négatif dans le cas contraire — ω^2 possède alors éventuellement une partie imaginaire.

En outre, la somme et le produit des racines sont respectivement donnés par :

$$\Sigma = k_{\parallel}^2 (V_S^2 + V_A^2) + k_o^2 V_A^2, \quad (6.10)$$

$$\Pi = k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2) V_S^2 V_A^2; \quad (6.11)$$

nous pouvons alors distinguer deux possibilités :

- soit $\Pi < 0$, c'est-à-dire $k_{\parallel} < k_c$, auquel cas ω_-^2 est la seule racine négative.
- soit $\Pi > 0$, c'est-à-dire $k_{\parallel} > k_c$, auquel cas nous devons étudier le signe de Σ pour savoir si les parties réelles des racines sont simultanément positives ou négatives. Or, on constate aisément que :

$$\Sigma = \left(\frac{1+2\beta}{1+\beta} + k_o^2 \right) V_A^2 > \frac{\beta}{1+\beta} (k_{\parallel}^2 + 4\mathcal{K}_{cA}^2) V_A^2 > 0.$$

car d'après (6.7), la condition $k_c > k_{\parallel}$ conduit à $k_o^2 > -k_{\parallel}^2 + \mathcal{K}_{cA}^2 4\beta/(1+\beta)$. Cela signifie que lorsque leur produit est positif, les deux racines de l'équation de dispersion sont nécessairement positives.

Il découle de cette étude sommaire que l'équation de dispersion ne peut avoir qu'une racine négative donnée par ω_-^2 et cela seulement lorsque le nombre d'onde du mode propre considéré est plus petit que la valeur critique, ou de coupure, k_c (afin de pouvoir s'opposer à la tension magnétique, les modes instables sont ceux de grandes longueurs d'ondes). Cette propriété corrobore la conclusion de l'étude du discriminant de la relation (6.8) ; en effet, en annexe A, nous avons montré qu'en MHD idéale il n'existe pas de mode surstable : les ω^2 instables sont réels.

6.1.4 Modes à $\omega^2 < 0$

Nous étudions plus particulièrement sur les modes à $\omega_-^2 < 0$, car ce sont eux qui vont déstabiliser le plasma. Précédemment nous avons vu que ω_-^2 est négatif lorsque $0 < k_{\parallel}^2 < k_c^2$ ce qui signifie que k_c^2 doit être positif et que, par conséquent, d'après la relation (6.7) le paramètre k_o^2 doit rester supérieur à $-k_c^2$. La figure 6.2 montre le taux de croissance Γ du mode instable

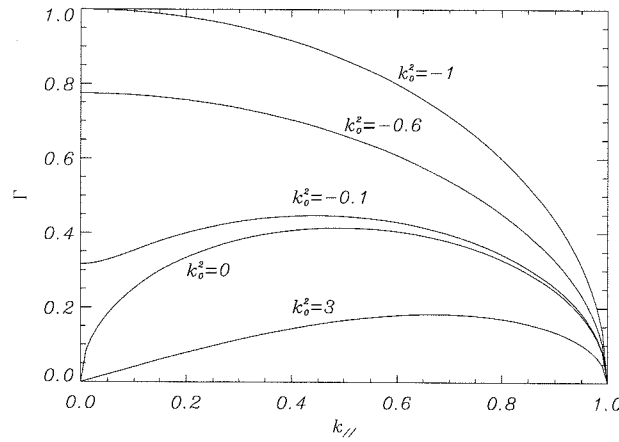


FIG. 6.2 – Tracé de la fonction $\Gamma = \sqrt{-\omega^2}$ pour différentes valeurs de k_o^2 comprises entre $-k_c^2$ et $3k_c^2$ et pour une valeur de $\beta = 1$. Les valeurs de k_{\parallel} sont normalisées par k_c et celles de Γ par $V_A k_c$.

pour plusieurs valeurs de k_o^2 (β est un paramètre qui ne change en rien la nature des courbes). Elle met en avant différents comportements de Γ suivant le signe de k_o^2 , mais nous ne nous intéressons qu'à son comportement au voisinage de $k_{\parallel} = 0$ car, comme nous allons le montrer dans la section suivante, seuls ces modes sont physiques dans des configurations magnétiques générales. Pour étudier plus précisément les variations de ω_- dans le domaine des grandes longueurs d'ondes parallèles, nous effectuons simplement un développement limité au premier

ordre en k_{\parallel}^2/k_o^2 :

$$\omega_-^2 \simeq \frac{V_A^2}{2} \left[k_o^2 - |k_o^2| + \frac{1+2\beta}{1+\beta} \left(1 - \frac{|k_o^2|}{k_o^2} \right) k_{\parallel}^2 - \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{k_c^2}{|k_o^2|} k_{\parallel}^2 \right].$$

On en déduit directement que :

$$\omega_-^2 \simeq \begin{cases} \left(-|k_o|^2 + \frac{1+2\beta - \beta k_c^2/|k_o^2|}{(1+\beta)} k_{\parallel}^2 \right) V_A^2 & \text{si } k_o^2 < 0, \\ -\frac{k_c^2}{|k_o^2|} k_{\parallel}^2 V_S^2 & \text{si } k_o^2 > 0. \end{cases}$$

La première expression de ω présente une nature alfvénique tandis que la seconde s'apparente à une onde magnétosonique. Au vu de ces équations de dispersion, calculées dans la limite $k_{\parallel}^2 \ll |k_o|^2 \sim k_c^2$, seule la condition $k_o^2 < 0$ peut potentiellement conduire à la déstabilisation du plasma ; dans cette limite, lorsque $k_o^2 > 0$, le système est également instable mais les taux de croissance sont alors infimes — le taux de croissance de ce mode est maximal pour des valeurs de k_{\parallel}^2 proches de k_c^2 .

En combinant les expressions de k_c^2 et k_o^2 , il apparaît donc que le cylindre est instable quand :

$$k_o^2 = -2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} - \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} + \frac{4\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 < 0. \quad (6.12)$$

En accord avec les développements du chapitre 5, nous reconnaissons dans le premier terme la contribution déstabilisante, liée à la combinaison d'un gradient de pression et d'un champ magnétique courbe, que l'on retrouve entre autres dans le principe d'énergie (A.18) ; le second terme est uniquement lié à la géométrie de la structure que l'on étudie et peut a priori avoir une contribution stabilisante ou déstabilisante. Quant au troisième terme de k_o^2 , il provient de la compression du plasma, comme le montrent les relations (5.6) et (5.8) ; sa contribution est bien entendu stabilisante.

6.1.5 Domaine de validité de cette approche

Comment vérifier l'ordering ?

D'une part, pour dériver le critère d'instabilité ci-dessus, nous avons procédé à la transformation de Fourier du déplacement suivant les lignes de champ magnétique ; mais, de façon plus générale, nous pouvons effectuer une transformée de Fourier sur chaque cylindre, étant donnée l'invariance de la structure sur chaque surface magnétique :

$$\xi \propto \exp(i\Phi) = \exp[i(m\theta + k_z z)] = \exp[i(k_{\parallel} s + k_{\perp} l)],$$

où le nombre d'onde azimutal est $k_{\theta} = 1/r \partial\Phi/\partial\theta = m/r$, s est la coordonnée curviligne le long de la ligne de champ magnétique et l la coordonnée curviligne transverse (dans le cylindre).

D'autre part, les équations de dispersion que nous avons établies découlent d'un ordering particulier se traduisant dans ce contexte de jet par :

$$\text{ordering ballooning : } \left\| \begin{array}{l} k_{\perp} r \gg 1 \\ k_{\perp}/k_{\parallel} \gg 1. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Les composantes du vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{k}_{\parallel} + \vec{k}_{\perp}$ sont simplement données par :

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_o \Rightarrow k_{\parallel} = \frac{m}{r} \cos \psi + k_z \sin \psi, \quad (6.14)$$

puis

$$\vec{k} \cdot \begin{pmatrix} B_{oz} \\ -B_{o\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow k_{\perp} = \frac{m}{r} \sin \psi - k_z \cos \psi. \quad (6.15)$$

La relation (6.15) montre clairement que pour des valeurs quelconques de l'angle de pitch on doit vérifier $m \sim k_z r \sim k_{\perp} r \gg 1$, tandis que la relation (6.14) montre que m et k_z ne sont pas indépendants car, pour chaque valeur de $\psi(r)$, ils doivent se combiner d'une façon très particulière pour faire « descendre » k_{\parallel} d'un ordre de grandeur — pour cela, le mode considéré doit nécessairement se propager dans le sens opposé à l'hélice magnétique. Or, le calcul des dérivées radiales de k_{\parallel} et k_{\perp} :

$$\frac{d}{dr} k_{\parallel} = -\frac{m}{r^2} \cos \psi - k_{\perp} \dot{\psi} \quad (6.16)$$

$$\frac{d}{dr} k_{\perp} = -\frac{m}{r^2} \sin \psi + k_{\parallel} \dot{\psi}, \quad (6.17)$$

montre de manière évidente qu'elles ne sont pas d'ordre k_{\parallel}/r mais plutôt d'ordre k_{\perp}/r . Il apparaît donc que, dans cette configuration axisymétrique, l'angle de pitch ainsi que le cisaillement du champ magnétique (lié à $\dot{\psi}$) produisent une variation radiale rapide des nombres d'onde qui, dans le cas général, se répercute sur la dérivée du déplacement, puis à travers les équations de dispersion (6.5) et (6.6), sur le déplacement lui-même.

Cohérence de l'ordering

Dans la définition de l'ordering qui nous a permis d'établir les équations de dispersion figurent les contraintes données par (6.13), mais également l'équation iconale stipulant que, $k_{\perp} = \nabla_{\perp} \Phi$, dirigé suivant \vec{e}_l , donne la seule direction de variation rapide. Or, nous venons de noter que dans le cas présent, la direction radiale (i.e. suivant \vec{e}_A) montre aussi des variations sur une petite échelle.

Il semble donc y avoir une inconsistance dans la manière d'aborder le problème du jet ; toutefois, l'analyse de l'annexe B montre que les équations linéaires exactes (B.35) et (B.36) ne contiennent aucun terme de la forme $(\vec{e}_A \cdot \nabla) \xi_{\parallel}$. Par conséquent, des variations du déplacement parallèle, sur de petites échelles radiales, ne changent en rien les résultats obtenus. En revanche, à travers la divergence du déplacement qui intervient dans la force de pression

totale, la prise en compte de variations rapides de ξ_A dans la direction radiale change la nature des équations du mouvement ; la pression totale du plasma n'est plus constante au premier ordre perturbatif.

Pour rester cohérents, nous devons donc supposer que la composante ξ_A du déplacement ne possède pas de variation rapide dans la direction radiale, contrairement à ξ_{\parallel} . Au vu des équations de dispersion (6.5) et (6.6) cela n'est possible que dans le voisinage d'une surface résonnante (définie par $k_{\parallel} \equiv 0$), c'est-à-dire lorsque $k_{\parallel}r$ est très petit devant l'unité ; la relation (6.5) se ramène alors à :

$$\omega^2 \xi_{\parallel} \simeq 2i \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 \xi_A ;$$

elle montre que, suivant \vec{e}_A , malgré l'absence de variations rapides de ξ_A , ξ_{\parallel} en récupère via k_{\parallel} . En revanche la relation (6.6), qui se résume à :

$$(\omega^2 - k_o^2 V_A^2) \xi_A \simeq 0,$$

n'implique, radialement, aucune variation à petite échelle pour ξ_A . Dans cette équation, formellement alfvénique, nous voyons que la condition d'instabilité est en fait celle définie par la relation (6.12) établie dans la section précédente ; elle est valide dans la limite $k_{\parallel}r \ll 1$ et est maximale sur la surface résonnante de chaque mode, lorsque $k_{\parallel} = 0$. Bien qu'instable sur une étendue radiale très limitée, le mode alfvénique reste pertinent car nous pouvons invoquer le théorème prouvé par Goedbloed & Sakanaka (1974). Ceux-ci montrent que si un mode à m et k_z fixés est localement instable suivant r alors il existe un mode global de même valeur pour m et k_z qui maximise le taux de croissance. Ce théorème n'est vrai que pour une structure statique : toutefois, en présence de rotation il prête à penser que les résultats du calcul radial local peuvent s'étendre au-delà de la région de validité stricte.

6.1.6 Z pinch

Le raisonnement que nous avons mené dans la section 6.1.5 est valable pour l'ensemble des structures cylindriques magnétisées dont les valeurs des composantes azimuthale et verticale du champ sont du même ordre de grandeur. Toutefois, les configurations dominées par le champ magnétique azimuthal, dites de Z pinch, sortent de ce cadre. En effet, lorsque $\psi \rightarrow 0$, un développement limité des vecteurs d'onde, au premier ordre en ψ , montre que :

$$k_{\parallel} \simeq \frac{m}{r} + k_z \psi \quad \text{puis,} \quad k_{\perp} \simeq \frac{m}{r} \psi - k_z.$$

L'ordering du ballooning (6.13) est vérifié avec $rk_{\parallel} \simeq m$ et $k_{\perp} \simeq -k_z$, si l'on assure la contrainte $\psi \sim m/(rk_z)$ avec $rk_z \gg 1$. Les variations radiales des nombres d'onde deviennent dans cette limite :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} k_{\parallel} &\simeq -\frac{m}{r^2} + k_z \dot{\psi} = -\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{rk_z \psi}{m} \frac{d \ln |\psi|}{d \ln r} \right), \\ \frac{d}{dr} k_{\perp} &\simeq -\frac{m}{r^2} \dot{\psi} + \frac{m}{r} \ddot{\psi} = -\frac{m}{r^2} \dot{\psi} \left(1 - \frac{d \ln |\psi|}{d \ln r} \right). \end{aligned}$$

Nous voyons alors que, suivant \vec{e}_A , les variations de k_{\parallel} et k_{\perp} sont respectivement de l'ordre de k_{\parallel}/r et $\psi k_{\parallel}/r$, c'est-à-dire lentes, lorsque $\ln |\psi|/\ln r \sim 1$.

Finalement, nous pouvons conclure que, dans les régions où un cylindre magnétisé est assimilable à une structure de Z pinch (i.e. telles que $\psi \sim k_{\parallel}/k_{\perp}$), seule la direction verticale présente des variations rapides dans la mesure où le cisaillement du champ magnétique varie suivant \vec{e}_A sur une échelle de l'ordre du rayon du jet. Ainsi, nous montrons que, dans le formalisme que nous avons adopté pour étudier les instabilités de pressions cylindriques — qui consiste à s'affranchir de l'équation iconale — contrairement aux structures où B_z et B_{θ} sont du même ordre de grandeur, les configurations de Z pinch sont sensibles à la fois au mode magnéto-sonique et au mode alfvénique. Lorsqu'elle est vérifiée, la condition $k_c^2 > 0$, où k_c est donné par (6.7), traduit donc l'instabilité de la structure magnétique de Z pinch ; dans ce cas, le critère (6.12) détermine seulement la stabilité des modes lorsque $k_{\parallel} \rightarrow 0$.

6.2 Rotation solide

6.2.1 Expression des forces

À présent, nous imposons au plasma du jet un mouvement de rotation solide, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_0$, autour de son axe de symétrie ; l'apparition des forces de Coriolis et d'inertie d'entraînement liées à l'accélération de la matière en rotation, va évidemment affecter la dynamique du jet de matière. Dans un référentiel fixe par rapport au plasma, ces contraintes s'expriment respectivement par :

$$\rho \vec{F} = -2 \rho \vec{\Omega}_0 \times \vec{v} + \rho r \Omega_0^2 \vec{e}_r, \quad (6.18)$$

où r est la distance à l'axe de l'élément de plasma que l'on suit.

La première étape du calcul consiste à linéariser cette force ; cependant nous devons avant tout préciser qu'il nous faut travailler dans le référentiel lié au mouvement d'équilibre de la matière car alors, conformément aux calculs effectués dans l'annexe B.1, tous les développements que nous avons déjà effectués pour un milieu immobile restent valables, modulo la présence de nouvelles forces linéarisées dans les équations du mouvement. Dans ce référentiel, l'équilibre du plasma s'écrit :

$$-\nabla P_* + \vec{T} + \rho r \Omega_0^2 \vec{e}_r = 0,$$

soit, en introduisant les échelles caractéristiques définies précédemment,

$$\vec{K}_c - \vec{K}_{b\perp} - \beta \vec{K}_\rho + \frac{\chi}{r} \vec{e}_r = 0, \quad (6.19)$$

où $\chi = r^2 \Omega_0^2 / V_A^2$. Il découle de ces relations d'équilibre qu'une rotation dynamiquement significative équivaut à $\chi \lesssim 1$, d'où $\Omega_0 \lesssim V_A/a \sim \omega = o(\varepsilon^0)$ avec $\varepsilon^{-1} \sim r k_{\perp}$ et a le rayon caractéristique du jet. Nous montrerons par la suite que la rotation ne viole en rien l'ordering sur lequel reposent nos calculs.

La linéarisation de $\vec{\mathcal{F}}$ dans le référentiel de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_o$ donne simplement l'expression :

$$\rho_o \vec{\mathcal{F}}(\vec{\xi}) = -2 \rho_o \vec{\Omega}_o \times \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + r \Omega_o^2 \delta \rho \vec{e}_r, \quad (6.20)$$

dans laquelle la variation de densité $\delta \rho = \delta P / C_S^2$ découle de la relation (4.9) reconsidérée dans le contexte des jets :

$$\delta \rho = -\rho_o \frac{1}{1+\beta} \left[\left(\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} \right) \xi_A + \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \right]. \quad (6.21)$$

Il nous faut également évaluer le produit vectoriel de $\vec{\Omega}_o$ par $\vec{\xi}$; or, dans le référentiel local $\{\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}$, d'après la figure 6.1, la vitesse angulaire (constante) dirigée suivant \vec{e}_z , se décompose comme :

$$\vec{\Omega}_o = \Omega_o (\sin \psi \vec{e}_{\parallel} - \cos \psi \vec{e}_l),$$

et par conséquent,

$$\vec{\Omega}_o \times \vec{\xi} = \Omega_o (-\cos \psi \xi_A \vec{e}_{\parallel} - \sin \psi \xi_A \vec{e}_l + \cos \psi \xi_{\parallel} \vec{e}_A),$$

où nous avons négligé ξ_l devant ξ_{\parallel} et ξ_A . Finalement, si nous passons dans l'espace de Fourier, la composante de la force linéarisée produite par la rotation s'écrit respectivement, dans les directions $\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l$ puis $\vec{e}_A = -\vec{e}_r$:

$$\mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi}) = -2i \omega \Omega_o \cos \psi \xi_A, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{F}_l(\vec{\xi}) = -2i \omega \Omega_o \sin \psi \xi_A, \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A(\vec{\xi}) &= 2i \omega \Omega_o \cos \psi \xi_{\parallel} \\ &\quad + r \Omega_o^2 \frac{1}{1+\beta} \left[\left(\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} \right) \xi_A + i k_{\parallel} \xi_{\parallel} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Suivant l'ordering que nous avons adopté, ces composantes de la forces $\vec{\mathcal{F}}$ sont toutes trois d'ordre ε ; au vu des développements du chapitre 3, les équations du mouvement suivant \vec{e}_{\parallel} et \vec{e}_A sont également d'ordre ε et par conséquent $\vec{\mathcal{F}}$ s'y inclut naturellement, tandis que suivant la direction \vec{e}_l , l'équation du mouvement d'ordre ε^0 reste inchangée — la pression totale du plasma est toujours conservée.

6.2.2 Equation de dispersion

En considérant la rotation solide du jet nous obtenons donc un nouveau jeu d'équations couplées sur ξ_{\parallel} et ξ_A ; la relation (4.17) devient :

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2) \xi_{\parallel} = i k_{\parallel} [V_S^2 (\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}) + V_A^2 (\mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A})] \xi_A + 2i \omega \Omega_o \cos \psi \xi_A;$$

or, en combinant $V_S^2 = V_A^2 \beta / (1 + \beta)$ et $\beta \mathcal{K}_{\rho_A} = \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A} - \chi / r$, on simplifie son écriture :

$$\begin{aligned} V_S^2 (\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}) + V_A^2 (\mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) &= 2 \mathcal{K}_{c_A} V_S^2 + \frac{\chi}{r} (V_A^2 - V_S^2) \\ &= 2 \mathcal{K}_{c_A} V_S^2 + \frac{\lambda}{\beta r} V_S^2, \end{aligned}$$

pour aboutir à une première équation :

$$\left(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2\right) \xi_{\parallel} = i \left(2 \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 + \frac{\chi}{\beta r} k_{\parallel} V_S^2 + 2 \omega \Omega_o \cos \psi\right) \xi_A. \quad (6.25)$$

La seconde découle de la relation (4.14), déterminant l'évolution de ξ_A ; elle s'obtient trivialement :

$$\left(\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2 + k_r^2) V_A^2\right) \xi_A = -i \left(2 \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 + \frac{\chi}{\beta r} k_{\parallel} V_S^2 + 2 \omega \Omega_o \cos \psi\right) \xi_{\parallel}, \quad (6.26)$$

où nous avons posé :

$$k_r^2 = \frac{\chi}{r} \frac{1}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}\right). \quad (6.27)$$

Les deux termes k_o^2 et k_r^2 se combinent ensemble comme :

$$k_o^2 + k_r^2 = -\left(\Gamma^+ \Gamma^-\right)_{AA} + \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}\right) \left(2 \mathcal{K}_{c_A} + \frac{\chi}{\beta r}\right). \quad (6.28)$$

La recherche des modes propres se fait à nouveau par le calcul du déterminant du système linéaire composé des équations (6.25) et (6.26) :

$$\left(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_S^2\right) \left(\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2 + k_r^2) V_A^2\right) - \left(2 \mathcal{K}_{c_A} k_{\parallel} V_S^2 + \frac{\chi}{\beta r} k_{\parallel} V_S^2 + 2 \omega \Omega_o \cos \psi\right)^2 = 0 ;$$

on le développe pour obtenir une nouvelle équation de dispersion du quatrième degré :

$$\begin{aligned} \omega^4 - \left[k_{\parallel}^2 (V_S^2 + V_A^2) + (k_o^2 + k_r^2) V_A^2 + 4 \Omega_o^2 \cos^2 \psi\right] \omega^2 - 4 \Omega_o \cos \psi k_{\parallel} V_S^2 \left(2 \mathcal{K}_{c_A} + \frac{\chi}{\beta r}\right) \omega \\ + k_{\parallel}^2 \left(k_{\parallel}^2 + k_o^2 + k_r^2 - \frac{4 \beta}{1 + \beta} \mathcal{K}_{c_A}^2 - \frac{1}{1 + \beta} \left(2 \mathcal{K}_{c_A} + \frac{\chi}{\beta r}\right) \frac{\chi}{r}\right) V_S^2 V_A^2 = 0, \end{aligned} \quad (6.29)$$

cependant, contrairement au cas sans rotation, la force de Coriolis supprime le caractère bicarré de la relation. Sa résolution exacte est toujours possible, mais n'apporte pas une information à la mesure de la difficulté du calcul ; nous allons donc nous contenter d'un développement autour d'une valeur limite.

Les équations (6.25) et (6.26) montrent que la discussion du paragraphe 6.1.5, sur la consistance de l'ordering dans notre approche, reste valable ; nous nous intéressons donc à la limite $k_{\parallel} \rightarrow 0$:

$$\omega^2 = (k_o^2 + k_r^2) V_A^2 + 4 \Omega_o^2 \cos^2 \psi. \quad (6.30)$$

Nous remarquons que dans la limite qui nous intéresse, la valeur de ω^2 reste réelle en présence de rotation. En outre, l'équation de dispersion étant réelle, les développements de ω^2 à k_{\parallel} fini seront réels à tous les ordres. Suivant le signe du carré de la pulsation, les modes sont donc toujours, soit purement oscillants, soit purement exponentiels (amortis ou instables).

La relation (6.30) montre que le cylindre en rotation devient instable lorsque :

$$\kappa^2 = -\left(\Gamma^+ \Gamma^-\right)_{AA} + \frac{\beta}{1 + \beta} \left(\mathcal{K}_{c_A} + \mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{\rho_A}\right) \left(2 \mathcal{K}_{c_A} + \frac{\chi}{\beta r}\right) + 4 \frac{\chi}{r^2} \cos^2 \psi < 0, \quad (6.31)$$

où nous avons utilisé (6.28), soit en réorganisant l'expression :

$$\begin{aligned} \kappa^2 = & - \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} - \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{r} \right) \mathcal{K}_{\rho A} \\ & + \frac{1}{1+\beta} \left(2\mathcal{K}_{cA} - \frac{\chi}{r} \right) \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{r} \right) + 4 \frac{\chi}{r^2} \cos^2 \psi < 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Cette dernière relation permet d'identifier différentes contributions stabilisantes ou déstabilisantes de ω^2 . Nous retrouvons évidemment tous les termes déjà présents dans le cas MHD pur, à savoir les effets géométriques, le terme d'interchange et celui lié à la compression, mais ces deux derniers se trouvent modifiés par la rotation. Par ailleurs, nous notons que la fréquence épicyclique produite par la force de Coriolis est toujours stabilisante.

Afin de détailler les effets de la rotation nous allons raisonner dans le cadre, défini sur la figure 5.1, du déplacement d'un tube de flux magnétique suivant \vec{e}_A sans qu'il ne subisse de torsion et en omettant le terme de géométrie. Nous allons évaluer la fluctuation de tension magnétique comme pour le cas présenté dans la section 5.4, mais également la modification de la force d'entraînement inertiel, due à la variation de densité ; l'effet de la force de Coriolis est quant à lui évident. Nous rappelons que, suivant les relations (5.17) et (5.18),

$$\delta I_A = 2\rho_o V_A^2 \mathcal{K}_{cA} \delta_{\parallel} \quad \text{avec} \quad \delta_{\parallel} = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A,$$

où la prise en compte de la rotation dans l'équilibre conduit à diminuer les valeurs de $\mathcal{K}_{\rho A}$ et \mathcal{K}_{bA} pour \mathcal{K}_{cA} donné. Par ailleurs, les relations (6.20) et (6.21) donnent pour la fluctuation de force d'entraînement :

$$\rho_o \mathcal{F}_{eA} = \rho_o V_A^2 \frac{1}{1+\beta} \frac{\chi}{r} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \xi_A.$$

La propriété remarquable $\delta_{\parallel} = -\beta \delta \rho / \rho_o$ implique donc que les forces de tension perpendiculaire et d'entraînement sont, toutes deux, simultanément stabilisantes ou déstabilisantes. La force totale s'écrit alors comme :

$$\delta I_A + \rho_o \mathcal{F}_{eA} = \rho_o V_A^2 \frac{1}{1+\beta} \left(\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} \right) \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{r} \right) \quad (6.33)$$

$$= \rho_o V_A^2 \frac{1}{1+\beta} \left[(1+\beta) \mathcal{K}_{\rho A} - 2\mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{r} \right] \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{r} \right), \quad (6.34)$$

que l'on retrouve dans l'expression (6.31) de κ^2 et qui, comme pour le cas MHD pur, est déstabilisante pour $\mathcal{K}_{\rho A} - \mathcal{K}_{cA} - \mathcal{K}_{bA} > 0$ — cependant, dans le cas présent nous devons également considérer le rôle stabilisant de la force de Coriolis.

Pour terminer, compte tenu de la relation $\mathcal{K}_{cA} = \cos^2 \psi / r$, nous pouvons récrire κ^2 , en séparant le terme de géométrie, les termes provenant de la variation de la tension magnétique puis ceux issus de forces liées à la rotation :

$$\begin{aligned} \kappa^2 = & - \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} + \frac{2\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA} \left[2\mathcal{K}_{cA} - (1+\beta) \mathcal{K}_{\rho A} - \frac{\chi}{r} \right] \\ & + \frac{1}{1+\beta} \frac{\chi}{r} \left[2(3+2\beta) \mathcal{K}_{cA} - (1+\beta) \mathcal{K}_{\rho A} - \frac{\chi}{r} \right]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

6.3 Analyse des critères d'instabilité

6.3.1 Voisinage de l'axe

Déstabilisation par cisaillement magnétique

La démonstration de la capacité du cisaillement magnétique à déstabiliser le confinement magnétique d'un plasma constitue une contribution importante de ce travail. Alors que dans le critère nécessaire de stabilité de Suydam (1.2) le terme de cisaillement est quadratique, dans les critères que nous obtenons il intervient linéairement ; par conséquent, suivant son signe, nous montrons qu'il peut jouer un rôle stabilisant ou déstabilisant. Cette différence fondamentale avec le critère de Suydam provient de notre choix de ne pas étudier les modes vérifiant l'équation iconale $k_{\perp} = \nabla_{\perp} \Phi$, mais plutôt de nous intéresser à des modes de Fourier — ces derniers ne sont pas valables dans des configurations toroïdales pour des raisons d'hétérogénéité du plasma.

Comme nous l'avons montré dans la section 6.1.5, hors du cadre où le champ magnétique azimuthal domine, notre approche du traitement des instabilités de pression cylindriques implique que seul soit retenu le critère alfvénique (6.32) et cela dans la limite $k_{\parallel} \rightarrow 0$ — nous conservons la discrimination alfvénique/magnéto-sonique bien que la rotation induise de nouveaux couplages dans les équations. À partir des expressions des échelles caractéristiques et des coefficients $(\Gamma^+ \Gamma^-)_{AA}$ du problème cylindrique, données en annexe D, nous récrivons ce critère d'instabilité comme :

$$\kappa^2 = \frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} S - \frac{1}{r} \left(2\beta \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \chi \right) \kappa_{\rho A} + \frac{1}{1+\beta} \left(2 \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} - \chi \right) \left(2\beta \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \chi \right) \frac{1}{r^2} + 4 \frac{\chi}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} < 0, \quad (6.36)$$

où le cisaillement magnétique est donné par :

$$S = \frac{d \ln |h|}{d \ln r} = 1 - \frac{d}{d \ln r} \ln \left| \frac{B_{o\theta}}{B_{oz}} \right|.$$

Nous constatons donc que lorsque $B_{o\theta}/B_{oz}$, croît plus rapidement que le rayon, S est déstabilisant. Pour la fusion thermonucléaire, les structures de confinement possédant des cisaillements magnétiques négatifs demandent des densités de courant très particulières ; toutefois, à la différence des structures de screw pinch, dans les parties internes des jets issus de disques d'accrétion, la densité de courant s'annulant sur l'axe, la rotation différentielle entre la structure magnétique et le flot de matière impose un cisaillement négatif — l'inertie du plasma en rotation lente empêche la libre rotation des lignes de champ magnétique, ce qui développe leur composante azimuthale. Pelletier & Pudritz (1992) montrent en effet que l'angle de pitch est déterminé par :

$$\frac{B_{o\theta}}{B_{oz}} = \frac{r}{v_z} (\Omega_o - \Omega_*) ,$$

où Ω_* est la vitesse angulaire d'une surface magnétique et v_z la vitesse verticale de la matière (dans le référentiel de l'observateur). En outre, les quantités Ω_o et Ω_* tendent toutes deux vers zéro lorsque l'on s'approche de l'axe ; par conséquent sur une fraction radiale du jet, on a simultanément, χ et $B_{o\theta}/B_{oz}$ plus petits — voire largement plus petits — que l'unité et $B_{o\theta}/B_{oz} \propto r^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

Dans ces parties des jets, le critère d'instabilité (6.36) est vérifié ; il s'identifie approximativement à :

$$\kappa^2 \simeq \frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} S < 0, \quad (6.37)$$

car les autres termes sont tous proportionnels à $(B_{o\theta}/B_o)^4$ ou $\chi(B_{o\theta}/B_o)^2$ et sont donc plus petits. En présence de rotation ou non, cela montre qu'un cisaillement magnétique négatif, c'est-à-dire tel que la force de tension augmente vers l'extérieur de la zone de confinement, est déstabilisant. Bien que le taux de croissance soit nul sur l'axe du jet, on remarque que lorsque qu'on s'en éloigne il augmente comme $|\omega^2| = |\kappa^2| V_A^2 \propto (r/a)^{2(\alpha-1)}/a^2$ où a est le rayon caractéristique du jet.

Variations radiales de B_{oz}

Pour établir l'expression (6.37), nous avons implicitement supposé que $\mathcal{K}_{\rho_A} \sim \mathcal{K}_{c_A}$; cela est valable lorsque, malgré un rapport $B_{o\theta}/B_{oz} < 1$, les variations de B_{oz} sont négligeables dans l'équilibre de la colonne. En effet, la résolution de l'équilibre radial conduit facilement aux relations :

$$\beta \mathcal{K}_{\rho_A} = \mathcal{K}_{c_A} \frac{d}{d \ln r} \ln |r B_{o\theta}| + \frac{B_{oz}^2}{B_o^2} \frac{d}{dr} \ln |B_{oz}| - \frac{\chi}{r} \quad (6.38)$$

$$\beta r \mathcal{K}_{\rho_A} = \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} - \chi, \quad (6.39)$$

qui montrent que lorsque la dérivée radiale de B_{oz} est négligeable, \mathcal{K}_{c_A} et \mathcal{K}_{ρ_A} sont proportionnels avec un coefficient de l'ordre de l'unité. A contrario, si ses variations sont significatives, B_{oz} doit nécessairement assurer le confinement local du plasma par pression magnétique et donc croître avec r (\mathcal{K}_{c_A} et χ étant négligeables). Ces régions sont instables par interchange car le critère (6.36), qui devient alors :

$$\kappa^2 \simeq \frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} \left(S - \frac{d}{d \ln r} \ln |B_{oz}| \right) = -\frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} \frac{d}{d \ln r} \ln \left| \frac{B_{o\theta}}{r} \right| < 0, \quad (6.40)$$

est obligatoirement vérifié.

Influence de la rotation

Bien que, dans les régions asymptotiques des jets, l'énergie cinétique de rotation de la matière semble être très petite devant l'énergie magnétique, ce qui assure $\chi < 1$, nous pouvons tout de même nous interroger sur la nature stabilisante ou non de la rotation. Pour répondre

à cette question, il nous faut évaluer l'influence globale des forces d'entraînement inertiel et de Coriolis ; à partir de la relation (6.35), nous pouvons conclure, en toute généralité, que lorsque la relation :

$$2(3 + 2\beta) \mathcal{K}_{cA} - (1 + \beta) \mathcal{K}_{\rho A} - \frac{\chi}{r} < 0 \quad (6.41)$$

est vérifiée, la rotation est déstabilisante. En outre, nous notons que, dans la cas présent, ce critère est une condition suffisante d'instabilité — le terme géométrique est déstabilisant et les forces de tension et d'entraînement ont des influences identiques ; l'effet dynamique de la force de Coriolis est déterminant.

Nous pouvons récrire cette relation à l'aide de la relation d'équilibre (6.39) pour montrer que la rotation déstabilise lorsque :

$$(1 + \beta) \frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > (4\beta^2 + 5\beta - 1) \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \chi. \quad (6.42)$$

Si B_{oz} varie suivant r , ce critère se réduit à $d \ln B_{oz} / d \ln r > 0$ qui est nécessairement vérifié pour satisfaire à l'équilibre ; dans ce cas la force de Coriolis est complètement négligeable. En revanche, si les variations de B_{oz} ne sont pas significatives, (6.42) se résume à :

$$(1 + \beta) \frac{d \ln |B_{o\theta}|}{d \ln r} > (4\beta^2 + 5\beta - 1) + \frac{\chi}{B_{o\theta}^2 / B_o^2},$$

qui requiert une croissance rapide de $B_{o\theta}$ afin que la rotation contribue à la déstabilisation des régions centrales du jet — par exemple, pour $\beta = 1$, le champ magnétique azimuthal doit varier plus rapidement que r^4 .

6.3.2 Confinement par le champ magnétique azimuthal

Le confinement magnétique de jet s'opère dans les régions où le champ azimuthal contrôle l'équilibre du plasma, c'est-à-dire lorsque $B_{o\theta} \gg B_{oz}$. Une telle configuration est possible pour des jets en provenance d'un disque d'accrétion car, avant de franchir la surface alfvénique (surface critique où la vitesse poloidale du plasma est égale à la vitesse d'Alfvén), les structures magnétiques s'évasent considérablement. Partant de $B_{o\theta} \sim B_{oz}$ à la « surface » du disque, par conservation du flux magnétique la composante verticale du champ diminue tandis qu'au contraire la composante azimuthale, très étirée, croît.

Nous avons mentionné précédemment que dans de telles configurations nos études sont valables pour toute valeur de k_{\parallel} ; en outre, les modes qui, quand $k_{\parallel} \rightarrow 0$, présentent une nature alfvénique ou magnétozonique restent physiques.

Rotation négligeable

Ces structures magnétiques où $B_{o\theta} \gg B_{oz}$ et où la rotation reste sans influence sont directement assimilables aux configurations de Z pinch. Suivant la nature de l'équilibre, en

particulier suivant la raideur du gradient de pression, soit la branche alfvénique soit la branche magnéto-sonique lente peuvent être instables.

S'il existe des modes instables leurs longueurs d'onde sont nécessairement telles que $k_c^2 > k_{\parallel}^2$. En combinant la définition (6.7) de k_c^2 , la relation d'équilibre (6.39) ainsi que l'expression de k_{\parallel} (6.14), nous déduisons que :

$$2\beta r \mathcal{K}_{\rho_A} \mathcal{K}_{c_A} = \frac{2}{r} \left(\frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} \right) > \frac{1}{r} \left(m \frac{B_{o\theta}}{B_o} + r k_z \frac{B_{oz}}{B_o} \right)^2$$

avec $\mathcal{K}_{c_A} = 1/r$ et $m \neq 0$, traduit l'instabilité de la colonne de plasma. Finalement cette condition se résume à :

$$\frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > -\frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} + \frac{1}{2} \left(m \frac{B_{o\theta}}{B_o} + r k_z \frac{B_{oz}}{B_o} \right)^2. \quad (6.43)$$

Cette expression généralise le résultat de Begelman (1998), obtenu pour le mode $m = 1$ avec B_{oz} constant :

$$\frac{d \ln |B_{o\theta}|}{d \ln r} > -\frac{1}{2} + r k_z \frac{B_{oz}}{B_{o\theta}} + \frac{1}{2} \left(r k_z \frac{B_{oz}}{B_{o\theta}} \right)^2, \quad (6.44)$$

mais aussi l'analyse des modes d'interchange à $m \neq 0$ faite par Kadomtsev (1966) avec $B_{oz} = 0$ (k_z est donc quelconque) et qui conduit à :

$$\frac{d \ln |B_{o\theta}|}{d \ln r} > \frac{1}{2} (m^2 - 2) \iff \frac{d}{d \ln r} \ln \left| \frac{B_{o\theta}}{r} \right| > \frac{1}{2} (m^2 - 4).$$

Lorsqu'il est instable, le mode $m = 1$ développe un enroulement en hélice de la structure magnétique (le déplacement du barycentre encourage la croissance des perturbations) ; sa similarité avec l'instabilité de kink à $m = 1$ conduit parfois à des confusions dans la littérature, cependant il s'agit bien ici d'une instabilité de pression et non d'une instabilité de courant (le courant parallèle est nul).

En outre, Kadomtsev (1966) obtient son critère en postulant des perturbations incompressibles ; nous notons cependant que les modes d'interchange ne sont pas par nature incompressibles car en conservant $\nabla \cdot \vec{\xi} \neq 0$ nous obtenons des seuils identiques d'instabilité. En revanche, il est très probable que les taux de croissance des modes à divergence nulle, non quasistatiques relativement aux modes transverses, sont plus importants que ceux que nous pouvons obtenir.

Pour déterminer, indépendamment de m , la nature alfvénique ou magnéto-sonique des modes instables, s'il en est, nous devons regarder le signe de k_o^2 . D'après la relation (6.12) le mode alfvénique est instable lorsque :

$$k_o^2 = \frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} S - 2\beta \frac{B_{o\theta}^2}{B_o^2} \frac{\mathcal{K}_{\rho_A}}{r} + \frac{4\beta}{1+\beta} \frac{B_{o\theta}^4}{B_o^4} \frac{1}{r^2} < 0.$$

Dans le contexte présent, où la composante azimuthale du champ magnétique domine sa composante verticale, nous constatons que l'influence du cisaillement magnétique est négligeable ; $k_o^2 < 0$ est donc équivalent à :

$$r\mathcal{K}_{\rho_A} > \frac{2}{1+\beta} \frac{B_o^2}{B_o^2}.$$

Ce critère général, indépendant de m , corrobore le résultat obtenu par Kadomtsev (1966) qui détermine le seuil de stabilité du mode particulier dit de « saucisse », $m = 0$, avec $B_{o,z}$ petit :

$$r\mathcal{K}_{p_A} > 2\gamma \frac{B_o^2/\mu_o}{\gamma P_o + B_o^2/\mu_o}.$$

En accord avec Begelman (1998) nous réexprimons ce critère au moyen de la relation d'équilibre (6.39), $\beta r\mathcal{K}_{p_A} = B_o^2/B_o^2 + d \ln |B_o|/d \ln r$, comme :

$$\frac{d \ln |B_o|}{d \ln r} > \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{B_o^2}{B_o^2} \implies \frac{d \ln |B_{o\theta}|}{d \ln r} > \frac{\beta - 1}{\beta + 1}. \quad (6.45)$$

Dans le cas des jets, $B_{o\theta}$ est nul au voisinage de l'axe pour atteindre des valeurs telles que $B_{o\theta} \gg B_{o,z}$ dans les régions de confinement. Il est donc clair que ces configurations magnétiques possèdent à la fois par des zones internes instables vis-à-vis du mode d'interchange $m = 0$ et des parties sensibles au mode d'interchange $m = 1$.

6.4 Conclusion

À partir des développements menés en annexe B sur les équations perturbatives linéaires de la MHD, dans le cadre général d'un milieu hétérogène non statique, nous avons établi un système de deux équations couplées, aux dérivées partielles, afin d'étudier les instabilités MHD de pression. Pour cela nous nous sommes restreints à des perturbations quasistatiques vis-à-vis des modes transverses, qui permettent d'éliminer de notre cadre d'approximation les ondes magnéto-soniques rapides ; un ordering approprié, requérant pour les perturbations des variations perpendiculaires rapides devant les variations parallèles, permet de ne traiter que les ondes d'Alfvén et les ondes magnéto-soniques lentes.

Finalement, le système différentiel général obtenu, incluant les caractéristiques d'hétérogénéité du plasma ainsi que la géométrie de la structure magnétique confinante, ne porte plus spatialement que sur la coordonnée longitudinale (parallèle au champ magnétique non perturbé). En outre, ce système ne fait évoluer que deux composantes du déplacement ; en effet la composante orientée dans la direction de variation rapide est éliminée par la propriété des perturbations à maintenir localement la pression magnétique constante (cela découle directement de leur caractère quasistatique).

Nous avons choisi d'appliquer ce résultat analytique à la partie asymptotique des jets astrophysiques en rotation lente. Nous montrons ainsi que le cœur de ces structures, où le champ magnétique vertical domine, est instable d'une part à cause du profil particulier du cisaillement de \vec{B}_o , contrôlé par la rotation des surfaces magnétiques et l'inertie du plasma,

d'autre part vis-à-vis des modes d'interchange dès que B_{oz} varie. Par ailleurs, nous montrons également que les parties plus externes des ces structures, là où le confinement par $B_{o\theta}$ s'effectue, sont également affectées par les modes bien connus $m = 0$ et $m = 1$ auxquels peuvent être sujettes les configurations de Z pinch.

Publication

**“Pressure- and magnetic shear- driven
instabilities in rotating jets”**

Evvy Kersalé, Pierre-Yves Longaretti et Guy Pelletier

A&A manuscript no.
(will be inserted by hand later)

Your thesaurus codes are:
02 (02.13.3; 09.10.1; 11.10.1)

ASTRONOMY
AND
ASTROPHYSICS

October 18, 2000

Pressure- and magnetic shear- driven instabilities in rotating MHD jets

Evy Kersalé¹, Pierre-Yves Longaretti¹, and Guy Pelletier^{1,2}

¹ Laboratoire d'Astrophysique, Observatoire de Grenoble, BP 53X, Grenoble Cedex 9, F38041, FRANCE

e-mail: [forename].[name]@obs.ujf-grenoble.fr

² Institut Universitaire de France

Received XXX ; Accepted XXX

Abstract. We derive new stability criteria for purely MHD instabilities in rotating jets, in the framework of the ballooning ordering expansion. Quite unexpectedly, they involve a term which is linear in the magnetic shear. This implies that cylindrical configurations can be destabilized by a negative magnetic shear as well as by a favorable equilibrium pressure gradient, in distinction with the predictions of Suydam's stability criterion, which suggests on the contrary that the shear is always stabilizing.

We have used these criteria to establish sufficient conditions for instability. In particular, the magnetic shear can always destabilize jets with vanishing current density on the axis, a feature which is generically found in jets which are launched from an accretion disk. We also show that standard nonrotating jet models (where the toroidal field dominates the poloidal one), which are known to be unstable, are not stabilized by rotation, unless the plasma β parameter and the strength of the rotation forces are both close to the limit allowed by the condition of radial equilibrium.

The new magnetic shear-driven instability found in this paper might provide us with a potential energy source for the particle acceleration mechanisms underlying the high energy emission which takes place in the interior of AGN jets, especially in the context of the two-flow model.

Key words: Magnetohydrodynamics : stability, ballooning, interchange – Jets : stability

1. Introduction

Jets are commonly observed in connection with Active Galactic Nuclei (AGNs) and Young Stellar Objects (YSOs). These jets are cylindrically collimated over remarkably long distances in comparison with their radial extents; the confinement provided by the magnetic tension of the toroidal field in current carrying jets has long

been recognized as an efficient way to achieve this type of collimation (as shown, e.g., by Chan and Henriksen 1981, Blandford and Payne 1982, after an initial suggestion by Benford 1978). However, it is well-known from the field of thermonuclear fusion that toroidally confined plasma configurations are generically unstable, and instabilities in this context are able to destroy these configurations on very short time-scales (for a general background on MHD instabilities, in particular in the context of thermonuclear fusion, see Bateman 1978, and Freidberg 1987). Furthermore, jets are subject to other instabilities, most notably the Kelvin-Helmholtz one, which pose similar threats to their survival. On the other hand, there is ample evidence of instability in the observed jets, both directly (lateral displacements of the jet beam, bright knots...) and indirectly (models of jet synchrotron emission rely on particle acceleration through e.g. shock waves or turbulence), but the observed jet survival implies that (for reasons which are still unclear), instabilities in real jets lead to internal reorganization and turbulence rather than to disruption.

Most of the literature on jet stability has focused on the Kelvin-Helmholtz instability (see, e.g., Birkinshaw 1991 and references therein), both for hydrodynamical and MHD jets, and for a variety of jet equilibria. Two types of modes are produced by this instability: ordinary surface modes and reflected body modes. Surface waves are effectively confined to the jet interface with the external medium, while body modes appear and become dominant only for beam velocities in excess of the fast magnetosonic velocity (up to a factor of order unity). Modes growth rates decrease when the Mach number increases. A longitudinal magnetic field has a stabilizing influence due to magnetic tension; in particular, sub-alfvénic (up to a factor of order unity) flows are completely stabilized. Radiative effects can either enhance or reduce the growth rate of the instability depending on the steepness of the temperature dependence of the cooling function; in the presence of radiative cooling, the surface waves are apparently the most dangerous for jet survival (Hardee and Stone 1997; Stone *et al.* 1997).

Send offprint requests to: P.-Y. Longaretti

Besides the Kelvin-Helmholtz instability, driven by the velocity gradient, jets can be unstable with respect to purely MHD processes. In the context of ideal MHD, these instabilities are usually divided into pressure-driven and current-driven instabilities (see e.g. Freidberg 1987 for details). Pressure-driven instabilities are related to the gradient of the equilibrium pressure and to magnetic field line curvature. The excited modes include the so-called sausage mode, and are usually divided into interchange modes and ballooning modes; they share some common features with the Rayleigh-Taylor and Parker instabilities. Current-driven modes originate in the current parallel to the magnetic field, and include the so-called kink instabilities: the most dangerous is usually the $m = 1$ kink mode (m being the azimuthal wave-number).

Much less attention has been devoted to the analysis of these MHD instabilities, most probably because in superfast jets (whose beam velocity exceeds the fast magnetosonic one), the kinetic energy exceeds the magnetic energy, and the Kelvin-Helmholtz instability is expected to dominate. Indeed, this expectation is borne out both in superfast and transmagetosonic jets (superalfvénic, but subfast beam velocities) for current-driven instabilities, whose growth rates are always substantially smaller than for the Kelvin-Helmholtz instability, at least for force-free jet equilibrium configurations (Appl and Camenzind 1992; Appl 1996). These authors also show that the jet current is stabilizing for supermagetosonic flows, whereas it is destabilizing for transmagetosonic ones.

This paper focuses on pressure- and magnetic shear-driven instabilities, in the framework of the ballooning ordering expansion. Pressure instabilities have been most actively studied in fusion research (Kadomtsev 1966; Coppi *et al.* 1979; Dewar and Glasser 1983; see Freidberg 1987, and references therein). In astrophysics, they have been considered in the context of solar (e.g., Hood, 1986) and magnetospheric physics (see Ferrière *et al.* 1999 for a recent and synthetic overview of the situation in this field). Although these instabilities have been virtually ignored in the context of MHD jets (with the exception of Begelman 1998), it is important to characterize their conditions onset there; indeed, in spite of their local nature, they are able to produce large-scale disruptions over a dynamical time-scale in fusion devices. Furthermore, our analysis is also motivated by the following considerations. Small-scale Kelvin-Helmholtz and current-driven instabilities are stabilized by magnetic tension. Furthermore, the Kelvin-Helmholtz instability in the transmagetosonic regime is confined to the jet boundary. These features don't make them favorable energy sources for the high energy emission which takes place in jet interiors. By contrast, the pressure- and magnetic shear-driven instabilities considered here usually have a small-scale component transverse to the magnetic field lines, and are expected to occur in the type of magnetic configurations which are typically considered for jet inner regions.

In this paper, we clarify somewhat the relation between the various classical stability criteria found in the literature, and we assess the role of the magnetic shear and of the rotation of the jet on the onset of jet instability, in particular in jet interiors. In the process, we point out the possible and unexpected destabilizing role of the magnetic shear. This paper is organized as follows. In Section 2, we recall the MHD equations and introduce our notations; we also briefly recall the origin of the ballooning ordering expansion, and present the perturbation equations in this approximation (their derivation is performed in the Appendix); finally, we introduce the type of modes we analyse in this paper (which are interchange and not ballooning modes) and specialize the ballooning equations to cylindrical systems. In Section 3, we focus on the mode dispersion relation and discuss its properties for non-rotating and rotating jets. Section 4 discusses our results and concludes this paper.

2. MHD equations and ballooning ordering

For simplicity, we consider cylindrically symmetric jets, and we neglect the shear of both the vertical and angular velocities. We do not consider the question of the radial jet boundary. Quantities pertaining to the jet equilibrium configuration are labeled with a "0" subscript.

2.1. MHD equations for jet equilibrium and perturbation

In a frame which is rotating and moving with the jet, the MHD momentum equation reads

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{\nabla P_*}{\rho} + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\rho \mu} + \Omega_o^2 r \mathbf{e}_o - 2\Omega_o \times \mathbf{v}, \quad (1)$$

where \mathbf{v} is the fluid velocity in the moving frame, P_* and ρ the fluid total (gaseous P and magnetic P_m) pressure and density, \mathbf{B} the magnetic field, μ the vacuum permeability, r the cylindrical radius and \mathbf{e}_r the radial unit vector. This equation is closed as usual with the mass continuity equation, the induction equation in the flux freezing approximation, and an adiabatic equation of state (we assume that $P\rho^{-\gamma}$ is constant throughout the plasma for simplicity).

The cylindrical equilibria considered in this paper are best characterized by introducing a number of vectors, $\mathcal{K}_c \equiv \mathbf{e}_\theta \cdot \nabla \mathbf{e}_\theta$, $\mathcal{K}_b \equiv \nabla B_o / B_o$, and $\mathcal{K}_\rho \equiv \nabla \rho_o / \rho_o$, where $\mathbf{e}_\theta \equiv \mathbf{B}_o / B_o$ is the unit vector in the direction of the unperturbed magnetic field \mathbf{B}_o ; \mathcal{K}_c is the curvature vector of the magnetic field lines, and \mathcal{K}_b characterizes the inverse of the spatial scale of variation of the magnetic field, while \mathcal{K}_ρ characterizes the inverse scale of variation of the fluid density. We also introduce the plasma β parameter: $\beta \equiv (C_S/V_A)^2$ where C_S and V_A are the sound and Alfvén speed. This parameter measures the relative importance of

the gas and magnetic pressures (our definition differs from the standard one by a factor $\gamma/2$). With these definitions, the jet force equilibrium relation reads

$$\rho_o V_A^2 \beta \mathcal{K}_\rho = \rho_o V_A^2 (\mathcal{K}_c - \mathcal{K}_{b\perp}) + \rho_o \Omega_o^2 r \mathbf{e}_r. \quad (2)$$

This equation implies in particular that the component of \mathcal{K}_ρ parallel to the magnetic field vanishes.

Linearizing the momentum equation Eq. (1), we obtain

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla \delta P_*}{\rho_o} + \frac{(\mathbf{B}_o \cdot \nabla) \delta \mathbf{B}}{\rho_o \mu} + \frac{(\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_o}{\rho_o \mu} + \delta \rho \Omega_o^2 r \mathbf{e}_r - 2\Omega_o \times \delta \mathbf{v}. \quad (3)$$

where $\delta \mathbf{v}$, δP_* , $\delta \rho$ and $\delta \mathbf{B}$ are the perturbed velocity, total pressure, density, and magnetic field, respectively. In terms of the perturbed gas pressure, one has

$$\delta P_* = \delta P + \frac{\mathbf{B}_o \cdot \delta \mathbf{B}}{\mu}. \quad (4)$$

For our purposes, the linearized momentum equation is most useful in lagrangian form. Introducing the lagrangian displacement $\boldsymbol{\xi}$, such that $\mathbf{v} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$, the continuity and induction equations can be integrated to yield

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho_o \boldsymbol{\xi}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B} &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_o) \\ &= -\mathbf{B}_o \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{B}_o + (\mathbf{B}_o \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}, \end{aligned} \quad (6)$$

while the expression of the total pressure perturbation follows from our adiabatic equation of state:

$$\delta P_* = \underbrace{-\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_o - \gamma P_o \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}}_{\delta P} + \underbrace{\frac{\mathbf{B}_o \cdot \delta \mathbf{B}}{\mu}}_{\delta P_m}, \quad (7)$$

where δP and δP_m represent the gas and magnetic pressure perturbations, respectively.

2.2. Ballooning formalism:

The origin of MHD instabilities lies in inhomogeneous or non-static MHD equilibria. In this paper, we focus on instabilities related to the equilibrium pressure gradient, the field line curvature and the magnetic shear; they are amenable to an analytic description in the framework of the ballooning ordering (Newcomb, 1961). As this formalism is not well-known in the astrophysical community, we briefly describe it below, and generalize it to rotating systems in a straightforward manner.

The rationale of the ballooning expansion scheme follows from properties of the linearized magnetic tension

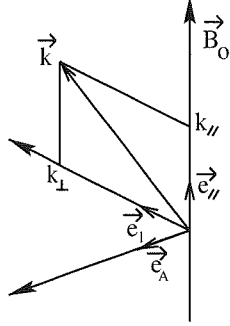
and of MHD wave propagation in homogeneous media. Let us consider plane waves, where $\boldsymbol{\xi} \propto \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, and assume that the direction of propagation is nearly perpendicular to the magnetic field, i.e. $k_\parallel \ll k_\perp$ where k_\parallel and k_\perp are the components of \mathbf{k} parallel and perpendicular to the magnetic field, respectively. In this limit, the frequencies of the slow [$\omega_s^2 \simeq C_s^2 V_A^2 / (C_s^2 + V_A^2) k_\parallel^2$] and Alfvén [$\omega_A^2 = V_A^2 k_\parallel^2$] modes are very small compared to the fast one [$\omega_F^2 \simeq (C_s^2 + V_A^2) k_\perp^2$] (see Appendix).

On the other hand, inhomogeneous equilibria are characterized by a scale L_o of inhomogeneity (e.g., $|\mathcal{K}_c| \sim |\mathcal{K}_b| \sim L_o^{-1}$). Order of magnitude considerations show that such inhomogeneities will contribute terms of order $V_A^2 L_o^{-2}$ or $C_s^2 L_o^{-2}$ to the dispersion relation, i.e. can destabilize the slow and Alfvén modes inasmuch as the mode scale in the direction of the magnetic field, represented by k_\parallel^{-1} in homogeneous equilibria, is not significantly smaller than L_o (we leave aside the fast mode for the time being).

With this consideration in mind, let us go back to wave propagation in homogeneous media, and introduce the orthogonal reference frame $(\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_A)$ where $\mathbf{e}_\parallel \equiv \mathbf{B}_o / B_o$ is parallel to the unperturbed magnetic field, $\mathbf{e}_l \equiv \mathbf{k}_\perp / k_\perp$ is parallel to perpendicular component of \mathbf{k} , and $\mathbf{e}_A \equiv \mathbf{e}_\parallel \times \mathbf{e}_l$ (see Fig. 1); the subscripts l and A stand for longitudinal and alfvénic, respectively ($\mathbf{e}_\parallel, \mathbf{e}_l$, and \mathbf{e}_A are the directions of the displacement of purely slow, fast and alfvénic modes respectively in the limit of nearly transverse propagation adopted here). Denoting $(\xi_\parallel, \xi_l, \xi_A)$ the components of the lagrangian displacement $\boldsymbol{\xi}$ in this reference frame, and introducing the small parameter $\epsilon \equiv k_\parallel / k_\perp$, the momentum equation in the direction of \mathbf{e}_l implies that $\xi_l \sim \epsilon \xi_\parallel$ for the slow mode; this implies in turn that $\delta P_* = 0$ to leading order in ϵ (see Appendix). This reflects the fact that in quasi-perpendicular propagation, slow magnetosonic perturbations behave quasistatically and purely compressively in the fast direction (parallel to \mathbf{e}_l). This cancellation of the total pressure is essential from a technical point of view: it allows us to introduce a WKB-like approximation perpendicular to the magnetic field, because it can be used to remove all spatial derivatives of the mode amplitude in the direction perpendicular to field lines, as argued in the Appendix; this greatly reduces the complexity of the problem. Incidentally, this eliminates fast modes from the analysis; in any case, these modes cannot be destabilized by the process considered here in this WKB-like approximation, as the terms connected to inhomogeneities are always subdominant in their dispersion relation.

In this discussion, we have focused on instability, but the formalism can account for overstability as well, which can arise when considering non-static equilibria. It turns out that this possibility plays little role for the modes we consider (see next section); the question of overstability for the fast magnetosonic mode is considered in section 4.

Turning back to inhomogeneous media, let us consider lagrangian displacements such that $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_o \exp(i\omega t - i\Phi)$. The standard ballooning formalism (e.g. Dewar and

Fig. 1. Definition of the reference frame $(e_{\parallel}, e_{\perp}, e_A)$

Glasser 1983) assumes $\mathbf{k}_{\perp} = \nabla\Phi \perp \mathbf{B}_0$ everywhere, introduces a small parameter $\epsilon \equiv (k_{\perp} L_o)^{-1}$, so that variations in the direction perpendicular to the unperturbed magnetic field are treated in the WKB approximation, but not parallel ones. As suggested by the properties of wave propagation in homogeneous media, one introduces the following self-consistent ordering:

$$\omega^2 \sim O(V_A^2 L_o^{-2}, C_S^2 L_o^{-2}), \quad (8)$$

$$\xi_l \sim O(\epsilon \xi_A, \epsilon \xi_{\parallel}). \quad (9)$$

As shown in the Appendix, the longitudinal component of the momentum equation implies $\delta P_* = 0$ to leading order in ϵ , as expected, while the two remaining components reduce to:

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} - \mathcal{D}_A \cdot \xi_A = \mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} + \mathcal{F}_A(\xi), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} - \mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A + \mathcal{F}_{\parallel}(\xi), \quad (11)$$

where \mathcal{F} stands for the inertial and Coriolis forces due to the rotation of the jet. In writing down these equations, we have defined auxiliary quantities, \mathcal{C} and \mathcal{D} , which characterize the perturbation of the magnetic tension; \mathcal{C} introduces coupling between the alfvénic and slow magnetosonic part of the perturbation, and vanishes for homogeneous media. Defining $\partial/\partial s \equiv \mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla$, these quantities can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A \cdot \xi_A = V_A^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \xi_A + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{AA}^{-} + \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \Gamma_{AA}^{-} + (\Gamma^+ \Gamma^-)_{AA} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \mathcal{K}_{c_A} \frac{\beta}{1+\beta} (\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) \right] \xi_A \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

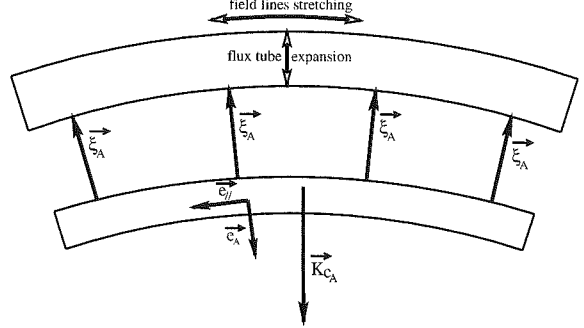


Fig. 2. Magnetic flux tube displacement

$$\mathcal{C}_A \cdot \xi_{\parallel} = 2 V_{SM}^2 \mathcal{K}_{c_A} \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \xi_{\parallel} \right), \quad (13)$$

for the alfvénic equation, and

$$\mathcal{D}_{\parallel} \cdot \xi_{\parallel} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_0 V_{SM}^2 \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b_{\parallel}} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho_{\parallel}} \xi_{\parallel} \right) \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\parallel} \cdot \xi_A = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_0 V_{SM}^2 (\mathcal{K}_{\rho_A} - \mathcal{K}_{c_A} - \mathcal{K}_{b_A}) \xi_A \right] \\ + V_A^2 \left[(\mathcal{K}_b - \mathcal{K}_c) \cdot \Gamma^- \cdot \xi_A + (\mathcal{K}_{b_A} - \mathcal{K}_{c_A}) \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \right], \quad (15) \end{aligned}$$

for the slow magnetosonic equation; $V_{SM}^2 \equiv \beta V_A^2 / (1 + \beta)$ is the slow magnetosonic speed. The matrices Γ^+ and Γ^- are defined by

$$\begin{aligned} \Gamma^{\pm} \cdot \xi_{\perp} &= \left(\xi_l \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial s} + \xi_A \frac{\partial \mathbf{e}_A}{\partial s} \right) \pm (\xi_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel} \\ &= \sum_{\alpha=\{l, a\}} \xi_{\alpha} [(\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\alpha} \pm (\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{e}_{\parallel}]. \quad (16) \end{aligned}$$

In homogeneous media, only the first term of \mathcal{D}_A and \mathcal{D}_{\parallel} remain. In this case, Eqs. (10) and (11) reduce to the dispersion relation of the Alfvén wave and slow magnetosonic wave, respectively. The coupling coefficient $\mathcal{C}_A \propto \mathcal{K}_{c_A}$, so that the coupling of the slow magnetosonic wave to the Alfvén wave is directly related to field line curvature in the absence of rotation. The matrices Γ^{\pm} encapsulate purely geometric effects due to the orientations of the field lines and of the wavevector \mathbf{k} .

These equations are usually written in a more compact form (see e.g. Dewar and Glasser 1983), which can be recovered after some lengthy algebra by inserting the equilibrium relation for non-rotating jets and rescaling the displacement components as to include the purely geometric effects just pointed out. The expanded version presented here is more suitable for our purposes.

Generically, pressure-driven instabilities work on a combination of the alfvénic and slow magnetosonic displacements, however, one can devise situations where one

or the other dominates. As an example, let us consider the origin of the destabilization of the Alfvén mode in a static shearless two-dimensional equilibrium with no variation along field lines (it is also possible to devise situations where one primarily destabilizes the magnetosonic mode, but the reasoning is less direct). Let us choose \mathbf{e}_A in the direction of the field line curvature, and consider displacements of a flux tube in the alfvénic direction, and constant along field lines [see fig. (2)]. In this approximation, only Eq. (10) remains, and reduces to

$$\frac{\partial^2 \xi_A}{\partial t^2} = V_A^2 \left(2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} - 4 \frac{\beta}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}^2 \right) \xi_A. \quad (17)$$

Instability follows if the right-hand side member of this equation amplifies the motion, i.e. if

$$\mathcal{K}_{\rho A} > \frac{2}{1+\beta} \mathcal{K}_{cA}. \quad (18)$$

This criterion reduces to the well-known criterion of instability with respect to $m = 0$ modes (known as the “sausage” mode, which is a pressure-driven mode) in cylindrical systems. (Kadomtsev 1966; see next subsection); it can be more directly established in the following way.

Because the total pressure perturbation cancels, stability with respect to the applied displacement is controlled by the sign of the magnetic tension, which, in this case, reduces to $\delta T_A = 2\rho_o V_A^2 \delta \mathcal{K}_{cA}$ because the perpendicular perturbation of the magnetic field vanishes for such displacements. In this type of displacement, $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$. The considered displacement of the flux tube is accompanied by a compression or an expansion (i.e. a change in $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$), whose sign and magnitude depends on properties of the considered equilibrium, and which can be computed from Eq. (A.7), combined with Eqs. (2) and (7). This procedure finally yields $\delta \mathcal{K}_{cA} = \beta [\mathcal{K}_{\rho A} - 2\mathcal{K}_{cA}/(1+\beta)] \xi_A$, whose sign leads to a destabilizing contribution of the magnetic tension when the criterion (18) is satisfied. This reasoning is typical of an interchange instability, and in fact, the ballooning formalism applies to both interchange and ballooning modes.

2.3. Reduction to cylindrical symmetry

The stability properties of the ballooning system of equation have been largely studied for cylindrical static equilibria in the context of thermonuclear fusion research. In particular, the well-known Suydam’s criterion provides a necessary condition for stability of the ballooning modes (see Freidberg 1987, chapter 10 and references therein).

In this paper, we follow a different route by relaxing the eikonal condition $\mathbf{k}_\perp = \nabla \Phi$. Instead, we Fourier transform the displacement vector in the vertical and azimuthal directions: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_o(\mathbf{r}) \exp(i\omega t - im\theta - ikz)$, i.e. we consider interchange, rather than ballooning modes. Ballooning and

interchange stability analyses in static media based on the form of the energy principle derived by Furth *et al.* (1965) show that the destabilizing term is $\propto \mathcal{K}_\rho \mathcal{K}_c$. For cylindrical configurations, this is maximized by choosing \mathbf{e}_A in the radial direction; this choice also leads to the simplest calculations. Therefore we assume $\mathbf{e}_A = -\mathbf{e}_r$ from now on (the minus sign is arbitrary, and chosen so that important quantities appearing later are positive). This completely specifies the reference frame ($\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_A$) introduced previously. The existence of modes which self-consistently satisfy these constraints in the framework of the ballooning expansion is verified in section 3.

Let us define $\mathbf{k} = m\mathbf{e}_\theta/r + k\mathbf{e}_z$ and $k_\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_o/B_o$. The constraint of quasi-perpendicular propagation implies that $k_\theta \ll \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_l$; this is satisfied in particular in the vicinity of magnetic resonances, implicitly defined by $mB_\theta/r + kB_z = 0$ (so that $k_\theta = 0$ on resonant surfaces), where B_θ and B_z are the azimuthal and vertical components of the unperturbed magnetic field. In general, due to magnetic shear, the constraint of quasi-perpendicular propagation implies that our system of equations is only valid within a region of limited radial extent for any given mode. However, we are mostly interested in generic conditions for instability rather than on mode structure; this makes this restriction of little importance, since ω is constant throughout the radial extent of the mode, and not only in the region of validity of our system of equations, so that conditions over ω established in this region are nonetheless valid for the whole mode. Furthermore, one can define a resonant k for any m and for an arbitrary magnetic surface, so that our analysis applies to the whole structure. Finally, Goedbloed and Sakanaka (1974) have proved an important theorem which implies that, at fixed m and k , if there is a (radially) local unstable mode, there must be a globally unstable one with maximal growth rate for this choice of m and k ; this theorem applies to static equilibrium configurations, i.e. in our case, to nonrotating cylindrical columns. Its relevance for real jets is unclear, due to velocity shear and rotation, but it nevertheless suggests that local stability results (in radius) might be relevant outside their strict domain of validity.

We conclude from this discussion that although the magnetic shear limits in theory the applicability of our analysis to a finite radial region for each mode, this restriction is of limited practical importance. Note furthermore that we have made no assumption concerning the radial behavior of the modes we consider, besides the limitation imposed by the nearly transverse propagation constraint, which in general should limit both amplitude and phase variations to scales much larger than k_θ^{-1} (however, see the discussion of section 3 for an important exception to this rule).

With our choice of reference frame, and the help of the equilibrium relation Eq. (2), the system of equations derived in the preceding section reduces to

$$(\omega^2 - V_{SM}^2 k_{\parallel}^2) \xi_{\parallel} = -i \left(2V_{SM}^2 \mathcal{K}_{cA} k_{\parallel} + \frac{\Omega_o^2 r^2}{1+\beta} \frac{k_{\parallel}}{r} + 2\Omega_o \omega \rho_o \frac{B_{\theta}}{B_o} \right) \xi_A, \quad (19)$$

$$[\omega^2 - (k_{\parallel}^2 + k_o^2 + k_r^2) V_A^2] \xi_A = i \left(2V_{SM}^2 \mathcal{K}_{cA} k_{\parallel} + \frac{\Omega_o^2 r^2}{1+\beta} \frac{k_{\parallel}}{r} + 2\Omega_o \omega \frac{B_{\theta}}{B_o} \right) \xi_{\parallel}. \quad (20)$$

In these equations,

$$\begin{aligned} k_r^2 &= \frac{\Omega_o^2 r}{(1+\beta) V_A^2} (\mathcal{K}_{cA} + \mathcal{K}_{bA} - \mathcal{K}_{\rho A}) \\ &= \frac{2\mathcal{K}_{cA}}{1+\beta} \left(\frac{\Omega_o^2 r^2}{V_A^2} \right) \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{(1+\beta)\mathcal{K}_{\rho A}}{2\mathcal{K}_{cA}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{\Omega_o^2 r^2}{(1+\beta) V_A^2 r^2} \left(\frac{\Omega_o^2 r^2}{V_A^2} \right); \end{aligned} \quad (21)$$

k_o is defined in terms of the following auxiliary quantities

$$\frac{h}{2\pi r} = \frac{B_z}{B_{\theta}}, \quad (22)$$

$$\Gamma^+ \Gamma^- = -\frac{2}{r^2} \frac{B_z^2 B_{\theta}^2}{B_o^4} \frac{r h'}{h}, \quad (23)$$

and reads

$$\begin{aligned} k_o^2 &= -\Gamma^+ \Gamma^- + \frac{2\beta}{1+\beta} (\mathcal{K}_{cA} + \mathcal{K}_{bA} - \mathcal{K}_{\rho A}) \mathcal{K}_{cA} \\ &= 2\mathcal{K}_{cA}^2 \left(\frac{B_z^2}{B_{\theta}^2} \right) \left(\frac{d \ln h}{d \ln r} \right) + \\ &\quad 4 \frac{\beta \mathcal{K}_{cA}^2}{1+\beta} \left[1 - \left(\frac{(1+\beta)\mathcal{K}_{\rho A}}{2\mathcal{K}_{cA}} \right) \right] - \frac{2\beta}{1+\beta} \frac{\mathcal{K}_{cA}}{r} \left(\frac{\Omega_o^2 r^2}{V_A^2} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

In Eq. (20), $V_A^2(k_o^2 + k_r^2)$ plays the rôle of a generalized Brunt-Väisälä frequency; k_r arises from the entrainment inertial force term. The term $\Gamma^+ \Gamma^-$ symbolizes the remaining component of the product of Γ matrices, and represents the effect of the magnetic shear (note that $r h'/h = d \ln h / d \ln r$ is the magnetic shear). The terms on the right hand side of Eqs. (19) and (20) represent the coupling between the two modes due to field line curvature, the entrainment inertial force, and the Coriolis force, respectively. Note that $\mathcal{K}_{cA} = (B_{\theta}/B_o)^2/r$.

3. Dispersion relation and instability conditions

The complete dispersion relation can easily be obtained from Eqs. (19) and (20). However, we are mostly interested in the $k_{\parallel} \rightarrow 0$ limit, for reasons exposed below.

3.1. Nonrotating jets

In order to get some grasp of the meaning of Eqs. (19) and (20), let us first consider non-rotating jets. In this case, the MHD perturbation equations become self-adjoint with our approximations, so that ω^2 is real.

Interesting general constraints can be derived from the dispersion relation which reads

$$\begin{aligned} \omega^4 - [k_{\parallel}^2 (V_A^2 + V_{SM}^2) + k_o^2 V_A^2] \omega^2 \\ + k_{\parallel}^2 (k_{\parallel}^2 - k_c^2) V_{SM}^2 V_A^2 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

where $k_c^2 \equiv \Gamma^+ \Gamma^- + 2\beta \mathcal{K}_{cA} \mathcal{K}_{\rho A} = 4\beta \mathcal{K}_{cA}^2 / (1+\beta) - k_o^2$. The roots can readily be extracted from this dispersion relation, but their properties are more directly understood in the following way.

The product of the two roots is positive when $k_{\parallel}^2 > k_c^2$. One can check that this implies that the sum is also positive, so that both roots are positive. Therefore

$$k_{\parallel}^2 < k_c^2 \quad (26)$$

is a necessary condition of instability for the modes considered here; it is also a sufficient condition, because the root product is negative then, implying that one root is negative. This relation implies in particular $k_c^2 > 0$, which, in the absence of magnetic shear, reduces to the necessary condition that the ballooning driving term in the energy principle of Furth *et al.* (1965) be destabilizing and is identical to (18).

Another condition is obtained by taking the limit $k_{\parallel} \rightarrow 0$ in the dispersion relation, which yields $\omega^2 = 0$ and $\omega^2 = V_A^2 k_o^2$ as the two roots. This implies that

$$k_o^2 < 0 \quad (27)$$

is also sufficient (but not necessary) condition of instability of the modes we consider. Note that k_c^2 and k_o^2 are both linear in magnetic shear, which bears directly to the existence of a shear-driven instability, as discussed in the next subsection.

To pinpoint the meaning of the second criterion, it is instructive to examine the behavior of the modes when $|k_{\parallel}| \ll |k_c|$, $|k_o|$ (which can always be achieved by an appropriate choice of k for any particular value of m). The first mode has $\omega^2 \simeq 0$. Then, Eq. (20) yields

$$\xi_A \simeq \frac{-2i\beta \mathcal{K}_{cA} k_{\parallel} \xi_{\parallel}}{(1+\beta) k_o^2}, \quad (28)$$

which can be inserted in Eq. (19) to obtain

$$\omega^2 \simeq -V_{SM}^2 \frac{k_c^2 k_{\parallel}^2}{k_o^2}. \quad (29)$$

For natural reasons, we refer to the modes which exhibit this behavior in the $k_{\parallel} \rightarrow 0$ limit to slow (magnetosonic) modes. From the general solution to the dispersion relation, the maximum value of ω^2 for this mode is obtained for $k_{\parallel}^2 \sim k_c^2$, which provides us with an estimate of their maximum growth rate, once inserted in (29). The second mode has

$$\omega^2 \simeq V_A^2 k_o^2. \quad (30)$$

Then Eq. (19) implies

$$\xi_{\parallel} \simeq \frac{-2i\beta K_{cA} k_{\parallel} \xi_A}{(1 + \beta) k_o^2}. \quad (31)$$

We refer to modes which exhibit this behavior in the $k_{\parallel} \rightarrow 0$ limit as to Alfvén modes. The maximum growth rate for these modes is reached for $k_{\parallel} = 0$.

With these definitions, the slow modes are unstable and the Alfvén ones stable when $k_c^2 > k_{\parallel}^2$ and $k_o^2 > 0$; the situation is reversed when $k_c^2 < k_{\parallel}^2$ and $k_o^2 < 0$. Both modes are stabilized by the usual contribution to the magnetic tension when $k_{\parallel}^2 > k_c^2$.

Note that when the magnetic shear is important, ξ_{\parallel} for the Alfvén mode, and ξ_A for the slow mode, undergo fast radial variations. One can check that fast radial variations of ξ_{\parallel} are not inconsistent with our procedure, which is not true for ξ_A . Therefore, when this occurs, one must discard the slow mode, which is not a self-consistent solution of our system of equations.

3.2. Jets with vanishing current density on the axis

There are situations in which one expects that B_{θ} increases with r faster than r in jet inner regions (in which case the current density vanishes on the axis). Indeed, for jets which are launched from an accretion disk, $u_z B_{\theta}/B_z = r(\Omega - \Omega_*)$ where Ω and Ω_* are the matter and field rotation respectively, u_z is the jet velocity along the jet axis (Pelletier and Pudritz, 1992). In these regions, one usually expects $u_z \neq 0$, while $\Omega, \Omega_* \rightarrow 0$ when $r \rightarrow 0$. Furthermore, polarization observations indicate that the magnetic field is predominantly aligned with the jet axis in jet cores, at least for quasar jets (see Gabuzda, 1997, and references therein). It is therefore reasonable to expect that $|B_{\theta}| < \ll |B_z|$ over a sizeable fraction of the inner region of these jets. In these regions, $k_o^2 < 0$ is automatically satisfied because the shear term dominates (as rotation is unimportant there) and is negative [see Eq. (24)], so that the inner regions of these jets are generically unstable. Note that our neglect of the velocity shear in the derivation of our equations has no impact on this conclusion, because both rotation and velocity shear terms are expected to be negligible in the considered jet regions. Obviously, $|B_z|$ must exceed $|B_{\theta}|$ over a sizeable

fraction of the jet interior for the instability to have noticeable effects and growth rates.

The destabilizing action of the magnetic shear just pointed out is the most important finding of this paper. It can be given a heuristic explanation in the following way. Regions with a destabilizing contribution of the magnetic shear are regions in which the shear contributes to an extra-increase of the alfvénic component of the equilibrium tension when one moves outwards. Applying a purely radial displacement to a magnetic flux tube (i.e., considering an alfvénic mode with $k_{\parallel} = 0$) produces a variation of the alfvénic component of the magnetic tension which does not include this extra piece due to the magnetic shear; therefore, the variation in the magnetic tension produces a restoring force on the displaced flux tube which is smaller than the restoring force on the equilibrium flux tube at the same location, and instability follows.

Note also that we must discard the magnetosonic mode, which is no longer a valid solution of our equations due to the fast amplitude gradient of ξ_A induced by the shear, as explained in the preceding section.

3.3. Nonrotating jets dominated by the toroidal field

In magnetically confined jets, one usually assumes $|B_{\theta}| \gg |B_z|$ in the confining region (“Z-pinch” configurations). This follows in particular when jets are launched from accretion disks, because they must open considerably before the critical surfaces are crossed, and the magnetic collimation becomes important. This boosts the ratio $|B_{\theta}|/|B_z|$ first because the poloidal flux is conserved within magnetic surfaces, second because the toroidal field is considerably stretched in the process, while this ratio is expected to be of order unity on the disk “surface” (Ferreira 1997; Casse and Ferreira 2000). In this case, $k_{\parallel} \simeq m/r + k B_z/|B_{\theta}|$ and $k_{\perp} \simeq k$. Furthermore k_{\parallel} depends on the radial location; Eq. (31) shows that ξ_{\parallel} contain no large amplitude variations [as implicitly assumed in the derivation of Eqs. (19) and (20)] provided that $|k r B_z/B_{\theta}| \lesssim 1$ and $|m| \lesssim 1$ (note however that fast amplitude variations of ξ_A do not invalidate the derivation of these equations). Then, the condition of quasi-perpendicular propagation is satisfied for $|k r| \gg 1$ (as m is a small integer).

When these conditions of consistency of the slow mode with our approximations hold, one can eliminate all gradients in terms of the logarithmic gradient of B_{θ} (the gradient of B_z vanishes or is negligible). This allows us to reexpress k_o as

$$k_o^2 = 4 \frac{\beta K_{cA}^2}{1 + \beta} \left[1 - \left(\frac{1 + \beta}{2\beta} \right) \left(r \frac{d \ln r B_{\theta}}{dr} \right) \right]. \quad (32)$$

The shear term has disappeared because it is negligible for $|B_{\theta}| \gg |B_z|$; the first term in brackets represents the stabilizing action of the plasma compression (it arises from the divergence of the displacement), while the other

term represents the action of the pressure gradient, either stabilizing or destabilizing. The expression for k_c^2 is very similar, and obtained by changing the sign and removing the compression term.

The limit $|B_\theta| \gg |B_z|$, completed with $|kr| \gg 1$ and $|krB_\theta/B_z| \lesssim 1$ allows us to connect with previously derived results on pressure-driven instabilities. In this case, recall that $k_\parallel = \text{sgn}(B_\theta)m/r + kB_z/|B_\theta|$, $\mathcal{K}_{cA} = 1/r$, and the criterion (26) becomes, with the help of Eq. (32):

$$\frac{d \ln |B_\theta|}{d \ln r} > \frac{1}{2} \left(m + kr \frac{B_z}{B_\theta} \right)^2 - 1, \quad (33)$$

which has been derived for $m = 1$, $k = 0$ modes with $\nabla \cdot \xi = 0$ by Kadomtsev (1966), and for an arbitrary mode by Begelman (1998).

The condition (27) which identifies the Alfvén branch as the unstable one reads in the same limit:

$$\frac{d \ln |B_\theta|}{d \ln r} > \frac{\beta - 1}{\beta + 1}, \quad (34)$$

a condition also obtained by Kadomtsev (1966) and Begelman (1998) for the $m = 0$ “sausage” mode (remember that our definition of β differs from the standard one by a factor $\gamma/2$).

We point out again that (33) [or equivalently (26)] is a necessary and sufficient condition for having unstable modes, but (34) is a condition for the Alfvén branch to be unstable; these conditions do not assume any particular value of m and do not rely on an incompressibility assumption. These points are often overlooked in the literature. Note however that for smooth profiles, $k_c^2 \gtrsim 1/r^2$, so that (33) limits m to small values, independently of the limit obtained from the consistency requirement of the slow mode. It is well-known that condition (34) is easy to meet in practice; in particular, it is always satisfied for a Lorentzian (or Bennett) profile. We conclude with Begelman (1998) that the configurations usually considered for magnetically confined jets are generically unstable in the absence of rotation. Indeed, the condition for instability Eq. (26) is always satisfied for $m = 0$, and probably $m = 1$ as well in jet inner regions, because $|B_\theta|$ must increase from zero on the axis to values $|B_\theta| \gg |B_z|$ in inner regions; in general it decreases too fast in most jet models when moving towards the jet radial boundary for outer regions to be unstable. Furthermore Eq. (34) implies that the Alfvén mode is very likely to be the unstable mode.

3.4. Rotating jets dominated by the toroidal field

Rotation, in particular the Coriolis force, introduces an extra-coupling between the alfvénic and magnetosonic part of the displacements, which is not vanishing in the $k_\parallel \rightarrow 0$ limit. Nevertheless, we stick with our distinction

between Alfvén and slow magnetosonic modes, although it is less meaningful in this context.

It is useful to characterize the jet rotation by introducing $\chi \equiv \Omega_o^2 r^2 / V_A^2$. The equilibrium condition Eq. (2) implies that χ , like β , is of order unity at most. More specifically, one has (Pelletier and Pudritz 1992)

$$\chi = \frac{1}{M^2} \frac{(1 - M^2 r_A^2 / r^2)^2}{(1 - r_A^2 / r^2)^2}, \quad (35)$$

where M is the poloidal Mach number and r_A is the Alfvén radius. In strong jets, one has $M^2 r_A^2 / r^2 \sim 1$ whereas r is always larger (possibly much larger) than r_A , which, as stated, implies that χ is of order unity at most. We assume $\chi \lesssim 1$, which maximizes the influence of rotation on the dynamics.

The influence of the jet rotation is again analyzed by deriving the dispersion relation, which reads:

$$\begin{aligned} \omega^4 - [k_\parallel^2 (V_A^2 + V_{SM}^2) + (k_o^2 + k_r^2) V_A^2 + 4\Omega_o^2 (B_\theta^2 / B_o^2)] \omega^2 \\ - 4\Omega_o (B_\theta / B_o) k_\parallel V_{SM}^2 \left(2\mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{\beta r} \right) \omega \\ + k_\parallel^2 [k_\parallel^2 - k_c^2 + k_r^2 \\ - \frac{\chi}{(1 + \beta)} \left(2\mathcal{K}_{cA} + \frac{\chi}{\beta r} \right)] V_{SM}^2 V_A^2 = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

where k_o^2 and k_r^2 are given in Eqs. (24) and (21).

In the limit $k_\parallel = 0$, this equation has two roots, the magnetosonic branch (whose degeneracy is broken by rotation) $\omega^2 = 0$, and the alfvénic branch

$$\omega^2 = V_A^2 (k_o^2 + k_r^2) + 4\Omega_o^2 \left(\frac{B_\theta^2}{B_o^2} \right). \quad (37)$$

The last term in this relation is due to the Coriolis force and is always stabilizing. This is a natural consequence of the form of this force, $\Omega_o \times \xi$, which gives rise to coupled oscillations between the components of the displacement vector. The factor B_θ / B_o arises because of the inclination of the magnetic vector \mathbf{B}_o with respect to the rotation axis.

The discussion of the stability properties in the absence of rotation implies that stabilization by rotation will only occur when $\chi \sim 1$. To quantify somewhat this statement, let us rewrite k_o^2 and k_r^2 as

$$k_o^2 = \frac{1}{r^2} \frac{4\beta}{1 + \beta} \left[1 - \frac{1 + \beta}{2\beta} \frac{d \ln r |B_\theta|}{d \ln r} \right] + \frac{2\chi}{r^2 (1 + \beta)}, \quad (38)$$

$$k_r^2 = \frac{2\chi}{r^2 (1 + \beta)} \left[1 - \frac{1 + \beta}{2\beta} \frac{d \ln r |B_\theta|}{d \ln r} \right] + \frac{\chi^2}{r^2 \beta (1 + \beta)}. \quad (39)$$

It is apparent that the contribution of the jet rotation to k_o^2 is always stabilizing. Furthermore, the pressure contributions to k_o^2 and k_r^2 are destabilizing when condition (34) is satisfied. The arguments of the previous subsection make this very likely to happen in the inner region of jets. A condition on the critical gradient of B_θ can easily be extracted, but it is not very informative. Instead, limits of instability can be obtained in the following way. We assume that $d \ln |B_\theta| / d \ln r \simeq 1$; this applies in jet inner regions when the behavior of the magnetic shear is not controlled by rotation, as in the previous section. The dispersion relation (37) implies then that $\beta \lesssim 1/4$ for $\chi \simeq 1$ or reversely $\chi \lesssim 1/2$ for $\beta \simeq 1$ constitute sufficient conditions of instability. This implies that it is very difficult in practice to stabilize the Alfvén mode by rotation, especially that jets possessing an important cylindrical asymptotic limit have $\chi \ll 1$ from Eq. (35), as such jets have $M \gg 1$.

Note that stability occurs for *high* β , whereas in the fusion context, the reverse is true. This follows because destabilization is provided by the rotation entrainment force rather than pressure forces.

The stability properties of the slow mode can be discussed in the $k_y \rightarrow 0$ limit. Assuming that the frequency of magnetosonic modes $\omega \propto k_y$ for small enough k_y , as implied by the dispersion relation, and keeping only the leading order term in k_y yields a reduced dispersion relation:

$$A\omega^2 + B\omega + C = 0, \quad (40)$$

where

$$\begin{aligned} A &= [(k_o^2 + k_r^2)V_A^2 + 4\Omega_o^2(B_\theta^2/B_o^2)], \\ B &= 4\Omega_o(B_\theta/B_o)k_y V_{SM}^2 \left(2K_{cA} + \frac{\chi}{\beta r} \right) \\ C &= k_y^2 \left(-k_c^2 + k_r^2 - \frac{\chi}{r(1+\beta)} \left(2K_{cA} + \frac{\chi}{\beta r} \right) \right) V_{SM}^2 V_A^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Because of the term $\propto \omega$ in this reduced dispersion relation, overstability rather than instability occurs when the discriminant $\Delta \equiv B^2 - 4AC < 0$. It turns out that for $\chi \simeq 1$ and $d \ln B_\theta / d \ln r \simeq 1$, $\Delta > 0$ whatever the value of β , implying that the slow mode is stabilized by rotation in the small k_y limit.

This suggests that the slow mode is more easily stabilized than the alfvénic one. In any case, our result on the Alfvén mode is sufficient to conclude that jets with a dominant toroidal field are difficult to stabilize by rotation.

4. Discussion

In this paper, we have focused on the stability of rotating MHD jets with respect to inhomogeneities connected to

the pressure gradient and magnetic shear, in the framework of the ballooning ordering. The most remarkable finding of our analysis is the possible destabilizing influence of the magnetic shear pointed out in section 3. Indeed, the shear appears quadratically in Suydam's well-known criterion, which applies to the stability of cylindrical columns, whereas the stability criterion of the preceding section is linear in magnetic shear. We point out that, had we not relaxed the eikonal condition in section 2, we would have recovered Suydam's criterion (see Freidberg 1987, Chapter 10). This unexpected behavior of the magnetic shear implies that the inner regions of jets launched from accretion disks are generically unstable, as argued in section 3.

We have also recovered that for jet models dominated by a toroidal magnetic field, jet interiors are likely to be subject to this type of instability, a result already pointed out by Begelman (1998). Furthermore, we find that rotation has little influence on this conclusion; rotation can only stabilize jets when it is close to the limit allowed by the radial equilibrium condition, and for values of β close to the same limit.

Our results on pressure-driven instabilities agree with those found in the literature, most notably Begelman (1998) and Ferrière *et al.* (1999), once appropriate limits are taken. Begelman's study is restricted to $B_\theta/B_z \gg 1$, which removes the effect of the magnetic shear from the analysis. Ferrière *et al.* (1999) do not rely on the ballooning expansion, keep the full six-dimensional dispersion relation, and discuss in detail the effects of rotation and gravity, besides gas pressure and field curvature. They give a detailed and interesting synthesis of gravitational and centrifugal instabilities in magnetospheric studies. However, to achieve such a generality, they rely on a particular coordinate representation of the magnetic field, which is well-adapted to planetary magnetospheres, but forbids also the presence of magnetic shear.

Jet models which are not dominated by the toroidal magnetic field have been proposed in the literature. One example is the force-free jet model of Appl and Camenzind (1992) which has $B_\theta \sim B_z$, and belongs to a class of configurations known as "reversed field pinch" in the fusion research context. These configurations are known to be stable with respect to pressure-driven instabilities for moderately low values of β (and, more generally, to possess good stability properties). This apparently conflicts with our results on destabilization by the shear. However, we point out that destabilization occurs because B_θ varies faster than r in the jet inner region. This variation is induced by the behavior of the jet matter and field rotation, a feature which is absent from fusion control devices.

In this analysis as in all others we are aware of, we have assumed that the jet equilibrium structure is invariant along the jet axis. This needs not be the case, as exemplified in various self-similar solutions (Sauty and Tsinganos, 1994; Contopoulos and Lovelace, 1994), and

more recently in a complete analytic solution displaying a more complex magnetic field structure by Bogoyalenskij (2000). The relevance of the available stability analyses to such configurations is unclear; furthermore, these configurations are possibly unstable with respect to appropriately chosen ballooning modes. In any case, this question should be addressed before firm conclusions can be drawn.

We have not tried to derive precise growth rates, as these depend on the radial structure of the most unstable modes, the determination of which is outside the scope of the approximation scheme we have adopted. However, order of magnitude considerations show that these instabilities should develop within a few dynamical time-scale ($\sim aV_A^{-1}$ where a is the characteristic radial size of the considered region).

Let us also return to the question of overstability, which was briefly alluded to in section 2 and 3. Our dispersion relation shows that ω^2 is real for alfvénic modes in the $k_{\parallel} = 0$ limit, implying that ω is real when $\omega^2 > 0$. This property remains true when $\omega(k_{\parallel})$ is computed as a series in k_{\parallel} , to all orders in this series if it is true to lowest order (this can be shown by induction from the full dispersion relation, because it involves only real terms). Therefore the stability property of the Alfvén mode is obtained in the $k_{\parallel} = 0$ limit. In the same way, the dispersion relation of Ferrière *et al.* (1999) [their Eq. (27)] implies that the fast magnetosonic mode is stable in the absence of magnetic shear in the perpendicular WKB approximation. This suggests that the fast mode is probably not destabilized in the asymptotic limit examined in this paper.

We point out again that, in spite of their partly local nature, pressure-driven instabilities, and magnetic shear-driven ones as well, are likely to produce large-scale disruptions of MHD jets. How real jets survive these instabilities as well as Kelvin-Helmholtz and current-driven instabilities is a still open and pressing problem, especially that 3D instabilities seem more vigorous than their 2D counterparts (see, e.g., Bodo *et al.*, 1998).

One of the interesting questions raised by this work concerns the possible link between the type of instabilities we consider and the particle acceleration mechanism which is responsible for the high energy emission seen in AGN jet interiors. For example, in the context of the two-flow model, most of the high energy emission comes from a highly relativistic pair plasma occupying the inner region of a slower jet which contains most of the mass and provides most of the energy. This model relies on energy injection to the pair plasma from the bulk of the jet through turbulence (Renaud and Henri, 1998); note also that the existence of a pair plasma in AGN jets has recently received an interesting observational support (Wardle, *et al.*, 1998; Hirokani *et al.*, 1998). In such a picture of the high energy emission, the required turbulence could most likely be provided by the magnetic shear instability in the nonlinear regime, as other sources look unpromising.

Indeed, a purely hydrodynamical origin in regions of increasing angular velocity with radius, as advocated by Richard and Zahn (1999) is not found in numerical simulations (Balbus *et al.*, 1996), and happens in laboratory Couette experiments (performed in general with narrow gap widths between the inner and outer cylinder) only when the outer cylinder completely dominates the rotation (Coles, 1965), a situation which has little connection with disks and jets; furthermore, the magneto-rotational instability (Balbus and Hawley, 1991) does not work in this regime, and the velocity shear is ineffective in driving the Kelvin-Helmholtz instability in the sub-alfvénic portion of the jet in jet interiors.

To conclude, let us finally point out that pressure-driven modes are also known to be avalanche-like instabilities, due to the existence of a critical gradient, and this feature raises important question concerning the action of this instability on jet profiles, as well as their role in jet variability.

Appendix A: MHD perturbation equations and the ballooning approximation

Let us first recall some properties of wave propagation in homogeneous media. In the reference frame introduced in section 2.2, the momentum equation yields the following three component equations

$$(\omega^2 - C_S^2 k_{\parallel}^2) \xi_{\parallel} = C_S^2 k_{\parallel} k_{\perp} \xi_{\perp}, \quad (\text{A.1})$$

$$(\omega^2 - C_S^2 k_{\perp}^2 - V_A^2 k_{\parallel}^2) \xi_{\perp} = C_S^2 k_{\parallel} k_{\perp} \xi_{\parallel}, \quad (\text{A.2})$$

$$(\omega^2 - V_A^2 k_{\parallel}^2) \xi_A = 0, \quad (\text{A.3})$$

while the total pressure perturbation becomes

$$\delta P_{*} = -i\rho_0 [(C_S^2 + V_A^2) k_{\perp} \xi_{\perp} + C_S^2 k_{\parallel} \xi_{\parallel}]. \quad (\text{A.4})$$

Eq. (A.3) gives the dispersion relation of Alfvén waves, $\omega_A^2 = V_A^2 k_{\parallel}^2$, which decouple from the two magnetosonic modes described by the remaining two equations. In the approximation of interest here ($\epsilon = k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$, i.e. nearly perpendicular propagation), these two equations imply $\omega_S^2 \simeq C_S^2 V_A^2 / (C_S^2 + V_A^2) k_{\parallel}^2$ and $\xi_{\perp} \sim O(\epsilon \xi_{\parallel})$ for the slow magnetosonic wave, while $\omega_F^2 \simeq (C_S^2 + V_A^2) k_{\parallel}^2$ and $\xi_{\parallel} \sim O(\epsilon \xi_{\perp})$ for the fast magnetosonic one.

Furthermore, the ξ_{\perp} momentum component Eq. (A.2) combined with Eq. (A.3) implies that $\delta P_{*} = 0$ to leading order in ϵ .

Let us now turn to inhomogeneous and non-static media. The ordering assumed in Eqs. (8) and (9) implies that the longitudinal component of the momentum equation [Eq. (1)] reduces to

$$\delta P_{*} = \delta P + \frac{\mathbf{B}_o \cdot \delta \mathbf{B}}{\mu} = 0., \quad (\text{A.5})$$

to leading order in ϵ . In establishing this result, the unperturbed momentum equation [Eq. (2)] has been used to show that $\Omega_o \sim \omega$ at most. The total pressure perturbation cancels because in the quasi-perpendicular propagation assumed here, slow and alfvénic perturbations behave quasistatically in the fast direction, and because fast perturbations are only compressional in the fast direction in homogeneous media, implying that inhomogeneous corrections are negligible in our WKB-like approximations. To derive the remaining two momentum component equations, we need to evaluate the tension perturbation in terms of the displacement ξ [the entrainment inertial term follows immediately from the perturbed density Eq. (5)]

$$\delta \mathbf{T} = \frac{\mathbf{B}_o \cdot \nabla \delta \mathbf{B}}{\mu} + \frac{\delta \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}_o}{\mu}. \quad (\text{A.6})$$

The magnetic field perturbation $\delta \mathbf{B} = \delta \mathbf{B}/B_o$ [cf Eq. (6)] along and perpendicular to the unperturbed magnetic field read

$$\delta_{\parallel} = -\nabla \cdot \xi_{\perp} - (\mathcal{K}_{b\perp} + \mathcal{K}_c) \cdot \xi_{\perp}, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \delta_{\perp} &= \Gamma^{-} \cdot \xi_{\perp} + \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} e_{\parallel} + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} e_A + (\xi \cdot \mathcal{K}_c) e_{\parallel} \\ &= \begin{pmatrix} \Gamma_{\parallel\parallel}^{-} \xi_{\parallel} + \Gamma_{\parallel A}^{-} \xi_A + \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} \\ \Gamma_{A\parallel}^{-} \xi_{\parallel} + \Gamma_{AA}^{-} \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

where the matrices Γ^{+} and Γ^{-} are defined in Eq. (16), $\partial/\partial s \equiv e_{\parallel} \cdot \nabla$, and the various \mathcal{K} s are defined right before Eq. (2).

In Eq. (A.7), the first term represents the variation of the field in its original direction due to the conservation of magnetic flux in transverse compression of the plasma; the second term represents the contribution of field advection, the last one the contribution of field line stretching.

With these results, the perpendicular component of the tension perturbation reads

$$\begin{aligned} \delta T_{\{l,A\}} &= \rho_o V_A^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta_{\{l,A\}} + \mathcal{K}_{b\parallel} \delta_{\{l,A\}} \right. \\ &\quad \left. + e_{\{l,A\}} \cdot \Gamma^{+} \cdot \delta_{\perp} + 2 \delta_{\parallel} \mathcal{K}_{c\{l,A\}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

while the parallel tension perturbation is given by

$$\delta T_{\parallel} = \rho_o V_A^2 \left[\delta_{\perp} \cdot (\mathcal{K}_{b\perp} - \mathcal{K}_c) + \frac{\partial \delta_{\parallel}}{\partial s} + 2 \mathcal{K}_{b\parallel} \delta_{\parallel} \right]. \quad (\text{A.10})$$

These equations for the perturbed magnetic field and magnetic tension are exact (the ordering has not been used in their derivation). Furthermore, by noting that

$$\nabla \cdot \xi_{\perp} = \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \xi_{\parallel} \mathcal{K}_{b\parallel} - \nabla \cdot \xi, \quad (\text{A.11})$$

it appears that derivatives of the displacement in the magnetic force term enter only through derivative along the field line and $\nabla \cdot \xi$; the same crucial feature holds for the entrainment inertial force term, while the derivatives of the displacement do not enter the expression of the Coriolis force term. With the help of the cancellation of the total pressure perturbation Eq. (A.5), one can express $\nabla \cdot \xi$ in terms of ξ and of the derivatives of the components of ξ in the field line direction. This yields

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \xi &= -\frac{1}{1+\beta} [(\beta \mathcal{K}_{\rho A} + \mathcal{K}_{bA} + \mathcal{K}_{bA}) \xi_A \\ &\quad + \beta \left(\frac{\partial}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \right) \xi_{\parallel} \\ &\quad - (1+\beta) (\mathcal{K}_{bA} + \mathcal{K}_{cA}) \xi_A] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

This reduces the problem to the set of ordinary differential equations for ξ_{\parallel} and ξ_A given in Eqs. (10) and (11).

References

- Appl, S., Camenzind, M., 1992, *A&A* 256, 354.
- Appl, S., 1996, *A&A* 314, 995.
- Balbus, S.A., Hawley, J.F., Stone, J.M., 1996, *ApJ*, 467, 76.
- Bateman, G., 1978, *MHD instabilities*, MIT Press, Cambridge Mass.
- Belgelman, M.C., 1998, *ApJ* 493, 291.
- Benford, G. 1978, *MNRAS* 183, 29.
- Birkinshaw, M., 1991, in: *Beams and Jets in Astrophysics*, ed. P.A. Hugues, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Blandford, R.D., Payne, D.G., 1982, *MNRAS* 199, 883.
- Bodo, G., Rossi, P., Massaglia, S., Ferrari, A., Malagoli, A., Rosner, R., 1998, *A&A*, 333, 1117.
- Casse, F. Ferreira, J., 2000, *A&A*, 353, 1115.
- Chan, K.L., Henriksen, R.N., 1980, *ApJ*, 41, 534.
- Coppi, B., Filreis, J., Pegoraro, F., 1979, *Ann. Phys. N.Y.* 121, 1.
- Contopoulos, J., Lovelace, R.V.E., 1994, *ApJ*, 429, 139.
- Coles, D., 1965, *J. Fluid Mech.*, 21, 385.
- Dewar, R.L., Glasser, A.H., 1983, *Phys. Fluids* 26, 3038.
- Ferrière, K.M., Zimmer, C., Blanc, M., 1999, *JGR* 104, 17335.
- Ferreira, J., 1997, *A&A*, 319, 340.
- Freidberg, J.P., 1987, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Plenum Press, New York.
- Furth, H.P., Killeen, J., Rosenbluth, M.N., Coppi, B., 1965, in: *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, IAEA, Vienna, Vol. 1, p. 103.
- Gabuzda, D.C., 1997, in: *Relativistic Jets in AGNs*, eds. M Ostrowski, M. Sikora, G. Madejski, M. Begelman, Cracow.
- Kadomtsev, B.B., 1966, in: *Reviews of Plasma Physics*, ed. M.A. Leontovitch, Consultants Bureau, New York, Vol. II.
- Hardee, P.E., Stone, J.M., 1997, *ApJ* 483, 121.
- Hood, A.W., 1986, *Sol. Phys.* 103, 329.
- Hirofani, K., Igushi, S., Kimura, M., Wajima, K., *PASJ*, 51, 263.
- Newcomb, W.A., 1961, *Phys. Fluids* 4, 391.
- Pelletier, G., Pudritz, R.E., 1992, *ApJ* 394, 117.
- Renaud, N., Henri, G., 1998, *MNRAS*, 300, 1047.

Richard, D., Zahn, J.-P., 1999, *A &A*, 347, 734.

Sauty, C, Tsinganos, K., *A &A*, 287, 893.

Stone, J.M., Xu, J., Hardee, P.E., 1997, *ApJ* 483, 136.

Wardle, J.F.C., Homan, D.C., Ojha, R., Roberts, D.H., 1998, *Nature*, 395, 457.

Troisième partie

MHD numérique en Astrophysique

Chapitre 1

Introduction aux concepts de la discipline

Sommaire

1.1	Apports de la MHD numérique en Astrophysique	129
1.2	Généralités sur la résolution des EDP	130
1.3	Particularités propres à la MHD	136

1.1 Apports de la MHD numérique en Astrophysique

Le champ magnétique est omniprésent en astrophysique, on le retrouve dans une palette variée d'objets, couvrant des échelles spatiales très diverses : des atmosphères de planètes au milieu intergalactique, en passant par les étoiles à différents stades de leur évolution et le milieu interstellaire, ou les galaxies et le milieu intergalactique. En outre, il se présente généralement dans ces systèmes comme une composante majeure sur le plan dynamique ; il met fréquemment en jeu des énergies comparables sinon plus importantes que les autres formes d'énergie présentes (cinétique ou thermique par exemple).

En dépit de leur importance, nombre de problèmes astrophysiques fondamentaux impliquant du champ magnétique restent mal compris ; c'est en particulier le cas des processus de dynamo — présents de la planétologie à l'astrophysique galactique — de l'origine et de la dynamique de jets stellaire et galactique, ou encore de la formation d'étoiles ou de l'évolution des nuages interstellaires, etc.

Ces différents systèmes sont évidemment extrêmement complexes, ils mettent en jeu à la fois des échelles spatiales et temporelles variées. L'étude de ces systèmes passe nécessairement par la résolution en temps et en espace des équations aux dérivées partielles déterminant l'évolution des plasmas MHD (le plus souvent idéale en astrophysique) ; la compréhension de leurs comportements non linéaires et non stationnaires impose que les recherches se fassent au moyen d'outils numériques généralement « lourds », permettant d'effectuer des simulations sur des supercalculateurs.

Nous présentons dans ce chapitre les principes élémentaires de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP dans la suite du manuscrit), puis certains aspects propres à la MHD numérique avant de décrire brièvement quelques codes utilisés en astrophysique.

De façon générale, pour comprendre les techniques de la MHD numérique et avancer dans nos propres développements, nous nous sommes inspirés de la littérature. Nous avons en particulier consulté les ouvrages de référence de Hirsch (1997a,b), les travaux de Stone & Norman (1992a,b); Stone *et al.* (1992) décrivant le code *Zeus*, puis ceux de Hawley & Stone (1995); Galsgaard (1995); ces différents articles constituent également la racine de notre recherche bibliographique.

1.2 Généralités sur la résolution des EDP

1.2.1 Classes des équations aux dérivées partielles

La modélisation d'un système physique dans l'approximation de la MHD conduit à un jeu d'équations aux dérivées partielles du second ordre — que l'on peut toujours en pratique ramener à des EDPs du premier ordre. D'un point de vue mathématique, suivant la manière dont les EDPs propagent l'information, elles sont dites hyperboliques, paraboliques, ou elliptiques. Les premières sont dominées par des processus de propagation d'ondes, l'archétype des équations hyperboliques est :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0;$$

les secondes admettent comme solutions des ondes amorties et présentent les propriétés de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Quant aux troisièmes, elliptiques, elles ne donnent pas lieu à la propagation d'onde mais sont dominées par les phénomènes de diffusion, telle l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Phi(x, y).$$

En MHD idéale, l'absence de dissipation confère au système d'équations un caractère hyperbolique ; l'introduction de résistivité ou de viscosité cinématique modifie la nature mathématique des EDPs qui présentent alors des aspects paraboliques voire elliptiques lorsque la dissipation est dominante. Évidemment, sur le plan numérique il faut développer des méthodes d'intégration adaptées aux différentes formes de propagation d'information — principalement à cause des disparités de temps caractéristiques. Lorsque le système d'équations ne présente pas un caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique dominant, les schémas doivent traiter de façon convenable chacun de ces comportements ; des méthodes envisagées telles que les « operator splitting method », consistent à séparer chaque contribution de nature différente dans les opérateurs d'évolutions, puis à les traiter par un algorithme approprié en

appliquant successivement chaque nouveau schéma au résultat du précédent pour finalement constituer une itération.

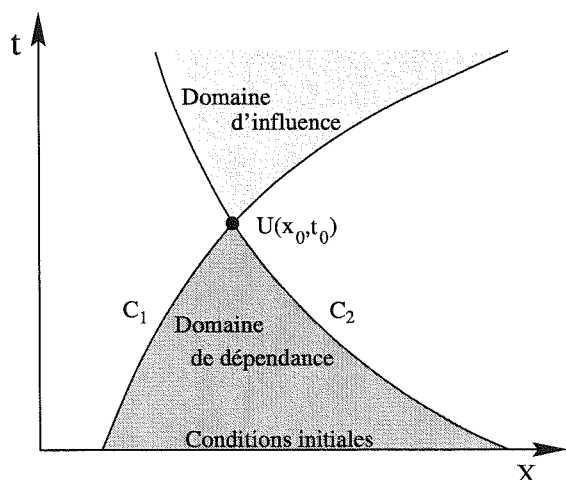


FIG. 1.1 – Régions d'influence et de dépendance du point (x_0, t_0) dans un problème hyperbolique possédant deux caractéristiques en chaque point.

À 1D, elles sont décrites par des équations de la forme $\partial x / \partial s = C(x, t)$, où s est la coordonnée curviligne le long de la caractéristique et C la vitesse du mode de propagation d'information associé. Le transport de l'information se fait par les invariants de Riemann qui restent constants durant leur propagation suivant les caractéristiques. La connaissance des invariants de Riemann et des caractéristiques détermine complètement l'évolution du système à partir d'un certain jeu de conditions aux limites. La figure 1.1 montre de quelle façon, dans un problème hyperbolique, les conditions initiales vont influencer sur la valeur des grandeurs physiques en un point et comment cela va ensuite se propager.

En chaque point de l'espace, il existe autant de caractéristiques que de modes de propagation de l'information ; les méthodes de type Godunov, qui ont donné des schémas très fiables (Colella & Woodward, 1984) en hydrodynamique compressible, ont naturellement été appliquées à la MHD (Brio & Wu, 1988; Hawley & Stone, 1995, entre autres), mais le traitement des invariants de Riemann est alors considérablement plus complexe du fait du nombre important d'ondes existant dans les plasmas magnétisés et de leur dégénérescence en champ faible. Pour des problèmes très généraux, incluant à la fois du magnétisme, de la rotation et un champ de gravité, les invariants de Riemann restent inconnus.

1.2.2 Techniques de discrétisation

Le traitement d'un problème physique de type « fluide » par le calcul numérique se fait en plusieurs étapes ; entre autres, après la modélisation mathématique du problème posé, il convient de discrétiser à la fois l'espace et les équations d'évolution.

La discrétisation de l'espace consiste à lui substituer un réseau de points, où maillage,

L'étude de la propagation de l'information dans un système hydrodynamique ou MHD non stationnaire constitue un point important dans le développement d'un code numérique ; d'une part cela conduit à un traitement correct des conditions aux limites, d'autre part, de cette étude découle une catégorie de schémas numériques particuliers résolvant les « équations caractéristiques » du milieu, tels que les schémas de type Godunov.

On appelle caractéristiques d'un système fluide les courbes, surfaces ou hypersurfaces (suivant un traitement uni-, bi- ou tridimensionnel), suivant lesquelles se propage l'information.

possédant une géométrie et une résolution adaptées à la physique étudiée; il est évident que, plus le pas de la grille est fin, plus la solution discrète exacte est proche de la solution analytique. Une fois le maillage défini, les équations peuvent à leur tour être discrétisées, au moyen d'un schéma d'intégration en temps et en espace, pour conduire à un système algébrique.

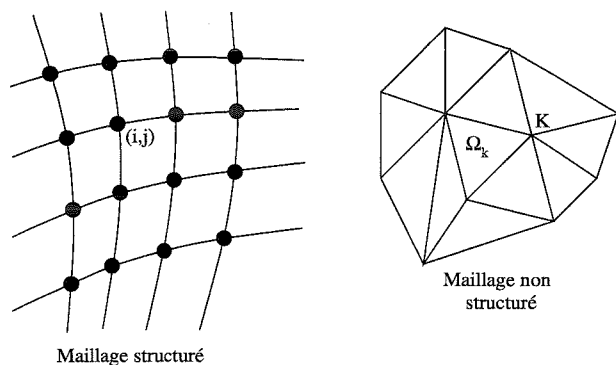


FIG. 1.2 – Deux types de maillages intervenant dans des méthodes numériques de natures différentes. À gauche un maillage structuré non uniforme, à droite un maillage non structuré.

Plusieurs approches permettent de discrétiser les EDPs; la plus simple, dite « méthode des différences finies », consiste à effectuer des développements de Taylor de chaque quantité suivie numériquement, afin de calculer ses dérivées spatiales ou temporelles à divers ordres et de façon plus ou moins précise. Un inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle nécessite un maillage régulier et structuré, c'est-à-dire dont les points, ou nœuds, sont repérés, comme sur un quadrillage, par l'intersection de deux familles de courbes.

La « méthode des éléments finis » généralise celle des différences finies à des maillages non structurés, possédant des cellules à géométrie variable. La figure 1.2 montre deux formes de maillage, l'un structuré et l'autre non; pour le second, il faut à la fois repérer les nœuds et les cellules. La seule contrainte des maillages non structurés est qu'ils doivent recouvrir la totalité de l'espace de simulation sans superposition des cellules entre elles.

Dans les méthodes aux éléments finis, le calcul des grandeurs inconnues ne se fait plus par de simples développements de Taylor mais par des méthodes plus générales d'interpolation, par des fonctions trigonométriques (méthodes spectrales), par des « splines », etc. En outre, distinction majeure avec les différences finies, ce type de technique repose sur une formulation intégrale du problème.

Une troisième méthode produisant des schémas d'intégration numérique consiste à discrétiser les équations intégrales conservatives dans l'espace physique, en appliquant des différences finies. Cette technique, dite des « volumes finis », tire parti des deux approches mentionnées précédemment; d'une part, pour le calcul des flux entrant et sortant de chaque cellule à travers leurs arêtes (ou leurs surfaces en 3D), elle bénéficie de la souplesse des maillages non structurés, d'autre part, en discrétisant directement les intégrales (et non pas les fonctions d'interpolation des éléments finis), les grandeurs physiques devant être conservées le sont de façon exacte.

1.2.3 Propriétés et méthodes d'analyse des schémas numériques

Une fois discrétisés l'espace physique et les équations d'évolution, il faut encore s'assurer de la validité du schéma d'intégration discret obtenu puis caractériser ses propriétés numériques. Trois conditions sont nécessaires pour qu'un schéma numérique constitue une approximation acceptable d'un problème différentiel, sur le plan « mathématique » : il doit être à la fois consistant, stable et convergent.

Consistance

Tout schéma numérique doit évidemment assurer l'équivalence entre les équations discrètes et les équations différentielles dans la limite du continu ; les algorithmes vérifiant cette propriété élémentaire sont dit consistants.

Afin de contrôler la consistance d'un schéma, les différentes valeurs discrètes u_i^n intervenant dans l'algorithme sont remplacées par leurs développements de Taylor. On obtient alors une « équation différentielle équivalente » qui diffère du système discret par des termes proportionnels au pas de temps Δt et au pas spatial Δx , et dont on doit s'assurer qu'ils tendent vers zéro dans la limite des Δt et Δx nuls. Cette différence entre la solution numérique exacte et la solution analytique de l'équation différentielle équivalente définit l'erreur de troncature. À titre d'exemple, nous appliquons cette technique au schéma numérique de Du fort-Frankel, utilisé dans la section 2.5.1 pour résoudre une équation de diffusion 1D, $\partial u / \partial t = \kappa \partial^2 u / \partial x^2$:

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i-1}^n),$$

où n repère le temps et i l'espace. En introduisant dans cette relation les développements de Taylor suivant t et x :

$$\begin{aligned} u^{n\pm 1} &= u^n \pm \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + o(\Delta t^4) \\ u_{i\pm 1} &= u_i \pm \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + o(\Delta x^5) \end{aligned}$$

nous trouvons aisément qu'elle est équivalente à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \kappa \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \kappa \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + o(\Delta x^3, \Delta t^3),$$

où le terme de droite représente l'erreur de troncature. Ce calcul démontre que, lorsque Δt et Δx tendent vers zéro dans un rapport constant, le schéma de Du fort-Frankel introduit dans l'EDP une dérivée seconde temporelle ; en revanche, si le rapport $\Delta t / \Delta x^2$ est maintenu constant, cet algorithme est consistant avec une équation de diffusion.

En outre, l'analyse consistant à établir une équation différentielle équivalente, puis l'erreur de troncature, permet clairement de déduire l'ordre de précision en temps et en espace du schéma numérique, c'est-à-dire la rapidité avec laquelle la solution discrète exacte va s'approcher de la solution analytique lorsque Δt et Δx tendent vers zéro.

Stabilité

La consistance d'un schéma désigne la capacité de la solution discrète exacte à tendre vers la solution analytique dans la limite du continu ; cependant, en pratique les calculs numériques ne conduisent pas aux solutions discrètes exactes, compte tenu des erreurs d'arrondi inhérentes aux machines. Il est par conséquent crucial de comprendre la façon dont un algorithme fait évoluer ces erreurs ; en particulier, il est important de voir si elles restent bornées ou non dans le temps, c'est-à-dire si le schéma est stable ou instable.

Plusieurs techniques permettent de tester la stabilité d'un schéma, de façon plus ou moins complexe et avec plus ou moins de précision, suivant la nature linéaire ou non des équations et la forme des conditions aux limites.

Une des approches les plus usitées est la méthode de Von Neumann, déterminant de façon exacte la stabilité d'équations linéaires, à coefficients constants, avec des conditions périodiques — si l'une des ces hypothèses n'est pas vérifiée, cette analyse apporte des conditions nécessaires de stabilité, mais reste très incomplète. Dans le cadre d'approximation de Von Neumann, les erreurs d'arrondi peuvent être développées en séries de Fourier spatiales :

$$\epsilon_p^n = \sum_{k=-N}^N \xi_k^n \exp(i\Phi),$$

N est le nombre de nœuds, ξ est l'amplitude d'un mode de Fourier et $\Phi = p k\pi/N$ sa phase. La sommation ne se fait que sur N modes compte tenu du critère de Shannon stipulant que la plus courte longueur d'onde considérée est $\lambda_{\min} = 2\Delta x$ (la plus grande est $\lambda_{\max} = 2N\Delta x$).

En outre, on démontre aisément que les erreurs d'arrondi vérifient les équations discrétisées du problème ; ainsi, dans le cas d'une équation unique, en y introduisant le développement de Fourier de ϵ , on obtient une relation entre ξ^{n+1} et ξ^n dont le rapport définit le facteur d'amplification $G \in \mathbb{C}$. Les conditions pour lesquelles la partie réelle de G reste inférieure à l'unité, quelle que soit la phase (*i.e.* pour tous les modes), déterminent les conditions de stabilité du schéma. Lorsque l'algorithme est stable, G exprime les erreurs numériques, sa partie réelle traduit l'amortissement des modes tandis que sa partie imaginaire montre leur déphasage.

Dans le cas plus général d'un système constitué de plusieurs équations, G devient une matrice d'amplification dont il faut étudier les valeurs propres. La stabilité d'un schéma requiert alors que le rayon spectral de G (*i.e.* le module des valeurs propres le plus grand) reste inférieur à l'unité.

L'étude de stabilité d'un schéma numérique, incluant les conditions aux limites, est théoriquement faisable, en toute généralité, en effectuant une étude spectrale de la matrice déduite de la discrétisation des opérateurs spatiaux. Toutefois, en pratique la recherche des modes propres de cette matrice s'avère souvent être un exercice très difficile.

L'étude de la stabilité linéaire des schémas numériques explicites (pour lesquels la valeur d'une grandeur au temps $n+1$, en un point de grille, ne dépend que de sa valeur aux instants

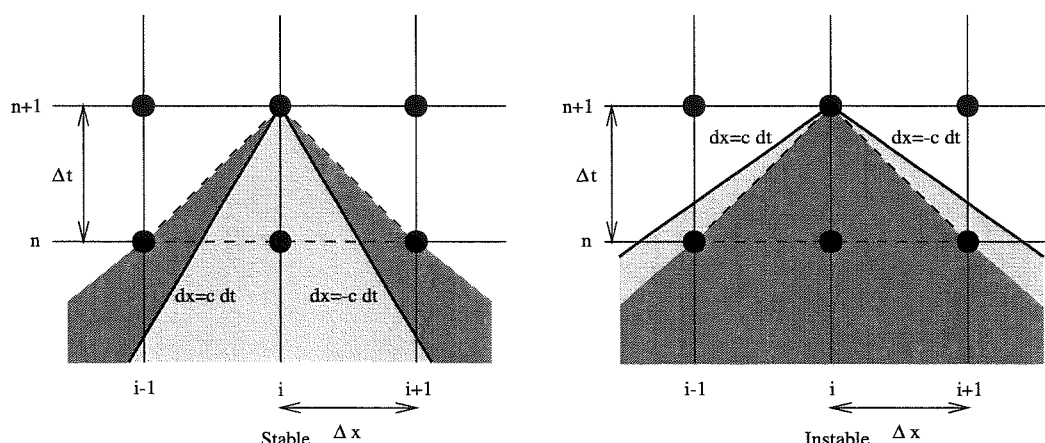


FIG. 1.3 – Zones de dépendance des équations discrète (foncée) et différentielle (claire). La figure de gauche montre une configuration stable vis-à-vis de la condition CFL, tandis que celle de droite est instable.

précédents) conduit généralement à une condition limitant le pas de temps pour un pas spatial donné :

$$\Delta t = \frac{\sigma}{c} \Delta x. \quad (1.1)$$

Cette condition, connue sous le nom de condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou CFL, fixe le pas de temps maximal en fonction de Δx , de manière à ce que, pendant une itération du calcul, l'information se propageant à la vitesse c ne puisse parcourir complètement une cellule du maillage ; dans le cas contraire, de l'information pourrait traverser une région de l'espace sans que celle-ci n'en soit affectée et cela conduirait inmanquablement à déstabiliser l'algorithme. Le facteur σ , appelé nombre de Courant, dépend de l'algorithme considéré ; il doit avoir une valeur inférieure à l'unité pour assurer la stabilité. Comme le montre la figure 1.3, la condition CFL impose que le domaine de dépendance des équations différentielles soit entièrement inclus dans celui des équations discrètes ; en pratique, cette limitation provient évidemment de la vitesse caractéristique la plus grande.

Convergence

Outre sa consistance et sa stabilité, on demande également à tout schéma numérique d'être convergent. Cela signifie qu'en un point fixé de l'espace et à un instant donné, la solution obtenue par un calcul numérique tend vers la solution analytique lorsque Δx et Δt tendent vers zéro.

Les trois propriétés que nous venons brièvement d'introduire ne sont pas indépendantes les unes des autres. Le « théorème d'équivalence » énoncé par Lax stipule que « dans un problème aux valeurs initiales bien posé, utilisant un schéma de discrétisation consistant, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante de convergence ». D'après ce théorème,

l'analyse de la consistance d'un algorithme — fournissant son ordre de précision et son erreur de troncature — puis de sa stabilité — déterminant également les erreurs d'amortissement et de dispersion en fonction des échelles de longueur — permet de conclure sur sa convergence, sans analyse supplémentaire.

1.3 Particularités propres à la MHD

Bien que la MHD représente une importante simplification de la dynamique des plasmas, ce cadre d'approximation reste néanmoins nettement plus complexe que l'approche hydrodynamique monofluide (de par le traitement du champ magnétique et des fortes non linéarités inhérentes), qui, somme toute, conduit déjà à des problèmes astrophysiques dont le traitement s'avère très difficile.

De façon générale les sujets de recherche en astrophysique font intervenir diverses échelles dynamiques rendant peut envisageables de réelles simulations globales, ne serait-ce qu'hydrodynamiques ; ces contraintes d'échelles sont d'autant plus vraies en MHD du fait de la nécessité de prendre en compte de nouvelles familles d'ondes ou de fronts de choc possédant des propriétés ignorées en hydrodynamique (voir, par exemple, dans la section 2.7.1, les différences fondamentales distinguant les tests de tube de choc hydrodynamique (Sod, 1978) et MHD (Brio & Wu, 1988)).

En outre, la célérité des ondes MHD peut devenir largement plus importante que la vitesse du fluide ou celle du son (dans les plasmas dominés par le champ magnétique); comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, les schémas numériques explicites en temps voient alors s'effondrer la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy, à un point où toute évolution devient raisonnablement impossible. Sans parler de ces extrêmes, il peut toutefois s'avérer inutile de faire évoluer une simulation sur des pas de temps dictés par la propagation des ondes magnéto-soniques, alors qu'elles ne sont d'aucun intérêt pour la physique étudiée ; les méthodes numériques spectrales peuvent, par exemple, être un moyen de contourner ce problème.

La disparité des temps caractéristiques de propagation des différentes formes d'information met en avant un autre point difficile de la MHD numérique qui est de pouvoir traiter, avec un même outil, des régimes dynamiques de plasmas dominés par le champ magnétique, par la pression thermique ou à l'équipartition. En effet, un code MHD n'est pas sollicité de la même façon lorsque le champ magnétique est simplement advecté ou lorsque qu'il contrôle la dynamique de la matière conductrice.

Un dernier problème complexe, propre à la MHD numérique, réside dans le traitement de la conservation du flux magnétique. Plusieurs études (voir, par exemple, Clarke (1988); Clarke *et al.* (1989)) ont montré les effets néfastes liés à un manque de précision dans le calcul de la contrainte — et non l'équation d'évolution — $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. La non conservation du flux magnétique à la précision de calcul des machines (et non à la précision des algorithmes), à chaque pas de temps, introduit dans les simulations d'importants artefacts découlant de la

présence de monopôles magnétiques dynamiquement significatifs.

Malgré ces différences qui distinguent intrinsèquement un milieu hydrodynamique d'un plasma MHD, les méthodes numériques simulant ces derniers s'inspirent autant que possible des nombreux développements qui ont été effectués pour le traitement des milieux continus fluides. Cependant, certaines avancées très importantes, ont été réalisées pour contraindre et faire évoluer de façon particulière le champ magnétique.

Evans & Hawley (1988) sont à l'origine d'une méthode originale de traitement de l'équation d'induction, qui conserve le flux à la précision des erreurs d'arrondi des machines, tout en faisant évoluer le champ magnétique et non le potentiel vecteur. Cette technique aux volumes finies dite de « transport contraint » (abrégiée CT dans la littérature, pour « constrained transport »), calcule les flux magnétiques à travers les surfaces des cellules du maillage à partir des forces électromotrices, puis détermine ensuite le champ magnétique en accord avec la conservation du flux. Cette méthode qui contraint l'advection du champ magnétique est ensuite couplée à un algorithme quelconque de calcul des forces électromotrices.

Des méthodes de caractéristiques ont également été développées spécialement pour la simulations de milieux MHD (Brio & Wu, 1988, par exemple). Stone & Norman (1992b); Hawley & Stone (1995) en particulier, combinent l'approche du transport contraint à ces méthodes, pour produire les schémas MoCCT¹. Dans le même ordre d'idée Ryu *et al.* (1998) ont appliqués la technique CT à des schémas de type TVD² — basés sur la résolution d'un problème de tube de Riemann à l'interface de deux cellules (« Riemann solver »), limitant, de plus, les transferts de flux.

1. Acronyme de « method of characteristic-constrained transport ».

2. Acronyme de « total variation diminishing ».

Chapitre 2

Travaux engagés dans le développement d'un code MHD

Sommaire

2.1	Introduction	139
2.2	Intégration numérique des équations de la MHD	141
2.3	Traitement des frontières	151
2.4	Différentes configurations géométriques	156
2.5	Nécessité de la dissipation numérique	160
2.6	Parallélisation	166
2.7	Validité du programme	168

2.1 Introduction

Au vu des capacités actuelles des centres de calcul et des méthodes numériques évoluées conçues pour la résolution de problèmes de MHD pertinents — tels que ceux évoqués dans le chapitre I-3 — il est évident que la transition vers des études numériques lourdes est une voie sérieuse de résolution des questions que nous nous posons sur les structures d'accrétion-éjection magnétiques.

En particulier, par ces méthodes, nous pouvons espérer une meilleure compréhension de la physique de la turbulence dans les disques d'accrétion au voisinage de l'équipartition ; cela, par exemple à travers le développement non linéaire de l'instabilité de ballooning. Il serait intéressant de savoir si cette instabilité intrinsèquement MHD est un moyen efficace de produire une turbulence entretenue conduisant à un transport de matière et de moment angulaire — via une résistivité ou une viscosité anormale — aussi important que l'instabilité MRI¹. Nous savons en effet que cette dernière, limitée par la hauteur du disque et la force de tension magnétique à des valeurs de champ magnétique faibles, n'est pas compatible avec les

1. MRI est l'acronyme de « magneto-rotational instability », mécanisme instable discuté dans la section I-3.1.

solutions de disques minces magnétisés nécessitant des valeurs de β très proches de l'unité (Ferreira, 1997).

Au moyen de simulations numériques lourdes, nous avons également fort à apprendre sur le développement d'instabilités dans les jets. Dans la continuité de nos travaux portant sur le ballooning il serait intéressant de connaître le comportement non linéaire de ce mécanisme instable et de caractériser sa transition vers la turbulence. Nous nous attendons à trouver cette instabilité au cœur des jets, d'une part afin de chauffer la matière optiquement mince que l'on voit briller, et d'autre part pour chauffer le plasma de paires électron-positron que nous supposons responsable du rayonnement de haute énergie dans les modèles à deux composantes de NAGs (Henri & Pelletier, 1991). Nous pouvons également nous poser la question du rôle du ballooning, processus éruptif, dans la stabilité globale du jet, au même titre que les instabilités de Kelvin-Helmholtz ou de Kink.

Cependant, la MHD numérique n'est pas d'une approche facile ; la richesse des apports de la simulation numérique en MHD est en grande partie due à la complexité des schémas d'intégration développés ces dernières années. De ce fait, la MHD numérique doit être aujourd'hui considérée comme une spécialité en soi ; il est effectivement nécessaire d'acquérir les compétences idoines pour être en mesure de développer, et parfois même pour utiliser, des codes de simulations numériques. Conscients de ces difficultés, à la vue du potentiel considérable de la MHD numérique nous avons tout de même choisi de nous y investir. Devant les différentes opportunités qui se présentaient à nous, nous avons préféré construire notre propre programme. En effet, plutôt que d'utiliser un code de simulation élaboré tel que *Zeus* — ce qui requiert tout de même d'entrer dans une « mécanique » complexe — nous avons opté pour l'approche a priori plus pédagogique consistant à le développer nous-même, malgré une connaissance très sommaire de cette problématique. Cette approche est certes très enrichissante par l'expérience qu'elle permet d'acquérir lors de la rencontre et de la recherche de solutions pour des points délicats de la MHD numérique ; mais il est évident qu'elle ne peut conduire rapidement à la même qualité de résultats scientifiques que ceux apportés par l'utilisation d'un outil déjà performant.

Pour démarrer cette étude nous sommes partis d'un noyau très rudimentaire mis en place à l'origine pour résoudre des problèmes de physique spatiale portant sur le chauffage par effet Hall dans des régions de « discontinuités » rotationnelles. Le schéma aux différences finies initial, que nous détaillerons dans la suite, possédait une géométrie cartésienne, bi-dimensionnelle et périodique. Bien que les simulations de test aient présenté une composante de champ magnétique, elles ne permettaient pas de conclure d'un traitement MHD correct. En effet, le champ magnétique considéré dans ces simulations était pris parallèle à la direction d'invariance et par conséquent ne produisait aucune force de tension magnétique. Seule la pression magnétique intervenait via l'advection du champ, mais ce type de simulation se comporte exactement de la même manière que des simulations hydrodynamiques dont l'équation d'état aurait été modifiée.

Nous avons essayé de faire évoluer le noyau initial afin d'apprendre les rouages de la MHD numérique tout en conservant cependant comme guide de travail la recherche d'un code permettant une production de simulations pertinentes pour notre problématique. Nous avons travaillé sur les caractéristiques géométriques de simulations, sur le choix des conditions aux limites ainsi que sur les schémas d'intégration temporelle. Nous avons également considéré différentes implémentations de dissipation numérique, une parallélisation du programme puis des simulations tests permettant d'avoir un aperçu de la qualité du code dans un contexte physique plus ou moins exigeant vis-à-vis des algorithmes utilisés.

Nous avons choisi de développer le programme dans le langage **Fortran 90**, principalement pour sa facilité d'écriture, sa lisibilité et sa compatibilité avec le langage **Fortran 77** fortement implanté dans la communauté des physiciens. Ce langage informatique permet une programmation vectorielle propre et possède un jeu d'instructions qui limite considérablement les risques d'erreurs lors du passage d'arguments entre sous-programmes. Toutefois l'optimisation du code lors de la compilation des fichiers sources en **Fortran 90** n'a pas toujours répondu à nos attentes et nous avons parfois dû renoncer aux facilités qu'apporte ce langage pour privilégier la rapidité d'exécution. Il est évident que l'importance des ressources informatiques que requiert une simulation MHD nous a obligés à nous pencher sérieusement sur le problème de l'optimisation de la programmation, en considérant les caractéristiques techniques des machines sur lesquelles nous souhaitons travailler. Le développement d'outils de post-traitement est également un aspect sous-jacent de la production de résultats numériques, non négligeable en temps d'investissement. Dans notre cas, ces outils se restreignent presque exclusivement à des routines de visualisation de cartes bi-dimensionnelles et de tracés de lignes de courant de matière ou de charge et de champ magnétique.

2.2 Intégration numérique des équations de la MHD

Dans cette section nous définissons les propriétés de l'espace-temps puis nous détaillons les caractéristiques des schémas numériques utilisés, afin de fixer le cadre de résolution d'un problème au moyen d'une simulation MHD. Mais auparavant nous allons énumérer, telles qu'elles se présentent dans le programme, les équations couplées et aux dérivées partielles que nous souhaitons intégrer.

2.2.1 Équations de la MHD

Pour simuler l'évolution des plasmas dans le cadre de la MHD idéale, nous suivons au cours du temps un ensemble de huit quantités physiques — deux grandeurs scalaires et deux grandeurs vectorielles — déterminant dans une certaine approximation les caractéristiques complètes de la matière et du champ magnétique.

Évolution de la matière

Bien que cela ne soit pas une nécessité des schémas d'intégration numérique (non conservatifs) que nous avons implémentés dans le programme, les équations de la MHD sont généralement présentées sous une forme conservative car cette écriture permet toutefois de limiter les aberrations numériques — en particulier lorsque les équations conservatives sont traitées par des schémas aux différences finies centrées. Les évolutions de la densité ρ et des trois composantes de l'impulsion de la matière, $\vec{p} = \rho \vec{v}$, sont en particulier données par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{p}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\frac{\vec{p}\vec{p}}{\rho} + \left(P + \frac{B^2}{2} \right) \vec{I} - \vec{B}\vec{B} \right], \quad (2.2)$$

où chaque tenseur de la forme $\vec{U}\vec{U}$ est défini par le produit tensoriel de U avec lui-même.

Pour fermer le système des équations hydrodynamiques nous avons considéré plusieurs solutions. Initialement, le code déterminait l'évolution dans le temps d'une quantité liée à l'entropie d'un gaz parfait. Celle-ci est définie à une constante près par :

$$S \propto \ln (P \rho^{-\gamma});$$

lorsque le milieu ne subit que des transformations adiabatiques — un élément fluide n'échange pas de chaleur avec ses voisins — il vérifie une équation d'état barotrope, c'est-à-dire une loi reliant directement la pression à la densité :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow P \rho^{-\gamma} = C^{\text{te}}. \quad (2.3)$$

Ces considérations permettent très facilement d'établir la relation de fermeture suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (P \rho^{(1-\gamma)}) = -\nabla \cdot (P \rho^{-\gamma} \vec{p}). \quad (2.4)$$

Néanmoins, pour des raisons d'économie de temps de calcul nous avons parfois préféré suivre l'évolution de l'énergie interne du plasma déterminée par :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \varepsilon \vec{v}) - P \nabla \cdot \vec{v}; \quad (2.5)$$

en effet, compte tenu de la définition de la densité volumique d'énergie interne d'un gaz parfait, $\rho \varepsilon = P/(\gamma - 1)$, l'équation (2.5) est strictement équivalente à (2.4) mais requiert numériquement moins d'opérations arithmétiques (pas d'élévation à la puissance en particulier). Cette écriture n'est cependant pas conservative ce qui tend à accroître les erreurs d'amortissement et de déphasage inhérentes au schéma numérique.

Évolution du champ magnétique

Pour terminer la présentation des équations du problème à résoudre numériquement, nous devons à présent décrire l'évolution du champ magnétique. Celui-ci est a priori donné à chaque

instant par la solution de l'équation d'induction (I-2.22) ; cependant, il faut garder à l'esprit que le calcul numérique doit en outre évoluer sous la contrainte $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, afin de ne pas créer de monopôle magnétique de façon artificielle.

La méthode envisagée pour s'affranchir de cette difficulté de la MHD numérique consiste à faire évoluer le potentiel vecteur, dont découle le champ magnétique, plutôt que le champ magnétique lui-même. L'équation d'évolution du potentiel vecteur \vec{A} se déduit directement de l'équation d'induction :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.6)$$

compte tenu du lien entre les champs \vec{A} et \vec{B} :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.7)$$

Il devient ainsi possible d'assurer la conservation du flux magnétique le long des tubes de champ dans la mesure où les opérateurs de dérivation numériques vérifient $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0$, à la précision de calcul de la machine.

En général, pour des fonctions à profil doux, effectuer des dérivations numériques successives ne réduit pas leur précision par rapport aux dérivées analytiques ; cependant, Clarke *et al.* (1989) avancent, sur la base de tests numériques, que pour avoir un calcul du courant précis au premier ordre (dérivée seconde du potentiel vecteur) il est nécessaire d'utiliser un schéma numérique du troisième ordre, sous peine de voir apparaître des instabilités sur les densités de courant. En s'affranchissant de cette contrainte, il peut tout de même exister, au voisinage des profils étroits de champ magnétique, des courants — et donc des forces — non physiques donnant naissance à des accélérations totalement artificielles.

Généralement, les conditions initiales que l'on se donne pour démarrer une simulation numérique portent cependant sur le champ magnétique plutôt que sur le potentiel vecteur. La méthode utilisée initialement déterminait ce potentiel vecteur par l'inversion d'une équation de Poisson. En effet, un choix de jauge² imposant un potentiel électrostatique nul — ce qui compte tenu de l'électroneutralité équivaut à $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ — permet de calculer le potentiel vecteur par la relation :

$$\Delta \vec{A} = \vec{j},$$

déduite de la loi d'Ampère, où le courant est donné par $\vec{j} = \nabla \times \vec{B}$. Cette équation est simplement inversible par un algorithme de transformation de Fourier rapide.

À cette méthode, nous en avons préféré une plus directe consistant simplement à séparer la composante initiale du champ magnétique et la composante issue d'une évolution :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \nabla \times \vec{A}^*, \quad (2.8)$$

2. En électromagnétisme, la conservation du flux magnétique et l'équation de Faraday montrent que le potentiel vecteur et le potentiel électrostatique Φ définissent complètement le champ magnétique par la relation (2.7) et le champ électrique par $\vec{E} = -\nabla \Phi - \partial \vec{A} / \partial t$. Ces expressions montrent que \vec{A} et Φ ne sont pas définis de façon identique, ce qui autorise un certain choix de jauge.

où $\vec{B}_0 \equiv \vec{B}(t=0)$ et \vec{A}^* est la valeur du potentiel vecteur à un instant donné moins sa valeur initiale, $\vec{A}^*(t) \equiv \vec{A}(t) - \vec{A}(t=0)$. Il est évident qu'ainsi défini, \vec{A}^* vérifie la même équation d'évolution (2.6) que \vec{A} mais est initialement nul.

Cette approche consistant à déterminer les propriétés du champ électromagnétique en terme de potentiel vecteur présente toutefois l'inconvénient de voir \vec{A} varier dans le temps dans un milieu stationnaire lorsque qu'il y a des mouvements — toute autre quantité physique restant constante par ailleurs. La relation (2.6) montre effectivement que le potentiel vecteur croît linéairement dans le temps dans une configuration où \vec{B} et \vec{v} restent constants ; il peut ainsi devenir extrêmement grand au cours d'une simulation et être à l'origine de graves problèmes dans la précision du calcul numérique. Il est néanmoins aisé de s'affranchir de cet artéfact par un choix de jauge approprié ; la définition de \vec{B} par la relation (2.7) indique que le potentiel vecteur n'est défini qu'à un gradient près et il est donc possible de le redéfinir tel que :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \lambda \quad \text{où} \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \lambda = -\vec{v}_{t=0} \times \vec{B}_{t=0},$$

sans changer la nature des champs magnétique et électrique. Compte tenu de ce nouveau choix de jauge, lorsque le plasma est stationnaire le potentiel vecteur ne croît plus dans le temps.

L'ensemble des équations que nous venons d'établir pour traiter numériquement l'évolution dans le temps du plasma MHD vérifie une loi d'échelle. Rien a priori ne fixe les tailles et les temps caractéristiques ou les amplitudes des grandeurs physiques ; on traite de la MHD idéale et de fluides parfaits, donc aucune échelle discriminante liée à la structure particulière de milieu (viscosité ou résistivité) n'intervient. Ainsi la taille de la simulation ou une longueur caractéristique de variation fixe l'échelle spatiale, puis le champ magnétique donne la vitesse d'Alfvén que l'on peut considérer comme unité de vitesse, et finalement, des échelles de longueur et de vitesse on déduit l'échelle de temps.

2.2.2 Discrétisation de l'espace-temps

À l'origine, le noyau dont nous nous sommes servis pour l'élaboration de notre code MHD faisait évoluer dans le temps des champs scalaires et vectoriels bi-dimensionnels — c'est-à-dire possédant une direction d'invariance — bien que traitant les trois composantes des vecteurs ; pour cette propriété on qualifie ce type de programme de « code 2D 1/2 ». Les deux dimensions spatiales utiles étaient discrétisées suivant une géométrie cartésienne avec dans chaque direction des intervalles de longueur constants entre chaque nœud.

Pour répondre à nos besoins propres, nous avons jugé nécessaire d'étendre l'espace de travail des simulations à trois dimensions. En faisant évoluer le programme de la sorte, nous étions bien entendu conscients du fait que des études numériques pleinement 3D sollicitent considérablement plus de ressources informatiques que lorsqu'elles possèdent un axe de symétrie ; la prise en compte de la totalité de l'espace physique accroît de façon significative la

durée des simulations parce que les calculs sont alors effectués dans la troisième dimension — d'où une première multiplication du temps de calcul par le nombre de points dans cette dimension — mais également parce que la levée d'une propriété de symétrie introduit nécessairement de nouveaux termes dans les équations. En outre, il est évident que les besoins de stockage et les temps de post-traitement s'en trouvent d'autant plus augmentés.

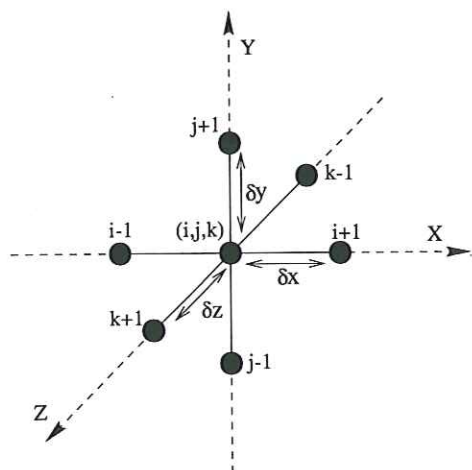


FIG. 2.1 – *Discrétisation des trois dimensions de l'espace cartésien. Cette figure montre les points auxquels sont calculées les grandeurs physiques que nous suivons. δx , δy , δz représentent les intervalles constants entre les nœuds dans les trois directions.*

Sur la figure 2.1 nous représentons la façon dont nous avons discrétisé les trois dimensions de l'espace. Par rapport au schéma initial, lors du passage en 3D nous n'avons pas introduit de raffinement supplémentaire comme des maillages croisés ou des pas d'intégration adaptatifs. Dans notre code, toute quantité physique est calculée aux nœuds — nous ne considérons pas de point intermédiaire — et, dans les trois directions, la fréquence d'intégration est constante bien qu'elle puisse être différente d'un axe à l'autre afin de répondre à des besoins d'anisotropie de résolution spatiale.

2.2.3 Schéma d'intégration spatiale

Dans la pratique, notre tâche consiste à traiter numériquement une série d'équations aux dérivées partielles (EDPs dans la suite) ; parmi les différentes voies permettant de procéder au calcul, nous avons opté pour la méthode semi-discrète, dite MOL³, qui consiste à convertir chaque EDP en un système d'équations différentielles ordinaires (ou EDOs). Évidemment, il est certainement plus efficace de résoudre une EDP par un algorithme conçu spécialement, mais la méthode que nous avons choisie ici se montre souvent apte à traiter des EDPs relativement générales et compliquées avec une efficacité convenable. L'idée des schémas MOL consiste simplement à discrétiser l'espace — et donc à définir des opérateurs de dérivation discrets — afin d'approximer une EDP par un système de n EDOs, où n est le nombre de nœuds couvrant l'espace de simulation. Chaque EDO calcule l'évolution de la fonction étudiée en un point de la grille à partir de sa valeur en différents nœuds. Par exemple, étant donnée une fonction $u(x)$ quelconque, si nous notons $u_i \equiv u(i\Delta x)$, où Δx est l'intervalle de longueur

3. MOL est l'acronyme de « method of lines ».

constant entre les points de grille, l'EDP :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, t),$$

se retranscrit comme l'ensemble des EDOs suivant :

$$\left\{ \frac{d}{dt} u_i(t) = \sum_k \alpha_{i,k} F_k(t), \quad i \in [1, n] \right\}. \quad (2.9)$$

L'intérêt de l'approche MOL — longitudinale lorsque l'on extrait des EDOs en temps, transversale lorsque qu'elles portent sur l'espace — est de pouvoir bénéficier de l'étendue des connaissances théoriques sur les EDOs et d'utiliser les algorithmes puissants développés pour les résoudre.

La première phase des schémas MOL consiste à discrétiser l'espace ; or, les équations locales qui décrivent la physique des plasmas MHD font intervenir des dérivations spatiales. Numériquement nous effectuons ces opérations mathématiques au moyen d'un schéma explicite aux différences finies. Par schéma numérique explicite on entend un algorithme qui permet directement de calculer la dérivée d'une fonction à partir des valeurs de cette fonction en différents points de grille ; par opposition, un schéma implicite donne la valeur d'une dérivée en un point, en fonction des valeurs de cette dérivée en des points voisins. Les algorithmes de cette seconde classe ont l'avantage d'être très précis, mais passent par l'inversion d'un système algébrique, coûteuse en temps de calcul.

Nous avons programmé un schéma centré, précis à l'ordre 4, qui, comme tout schéma aux différences finies, provient d'opérations algébriques élémentaires sur des développements de Taylor. Suivant le formalisme indiqué ci-dessus, nous exprimons le développement limité à l'ordre 5 de u en $(i \pm 2)\Delta x$ par :

$$u_{i\pm 2} = u_i \pm 2 \left. \frac{du}{dx} \right|_i \Delta x + 2 \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 \pm \frac{4}{3} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \frac{2}{3} \left. \frac{d^4u}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + o(\Delta x^5),$$

que l'on peut combiner pour obtenir :

$$u_{i+2} - u_{i-2} = 4 \left. \frac{du}{dx} \right|_i \Delta x + \frac{8}{3} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + o(\Delta x^5). \quad (2.10)$$

Nous pouvons opérer de la même manière en $(i \pm 1)\Delta x$:

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm \left. \frac{du}{dx} \right|_i \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_i \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{d^4u}{dx^4} \right|_i \Delta x^4 + o(\Delta x^5);$$

on effectue la différence $u_{i+1} - u_{i-1}$ pour trouver :

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2 \left. \frac{du}{dx} \right|_i \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_i \Delta x^3 + o(\Delta x^5). \quad (2.11)$$

Pour terminer, nous pouvons ajouter (2.10) et (2.11) de façon à annuler les contributions de la dérivée troisième de u et définir ainsi un schéma de dérivation spatiale précis à l'ordre 4 :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_i = \frac{8(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i+2} - u_{i-2})}{12 \Delta x} + o(\Delta x^4). \quad (2.12)$$

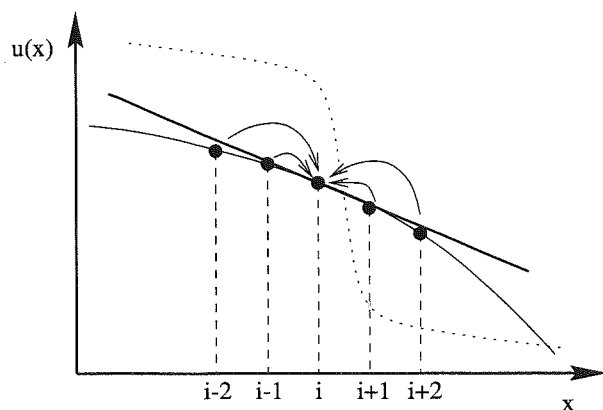


FIG. 2.2 – Dérivation spatiale centrée, au quatrième ordre sur une grille homogène. L'information est récupérée sur quatre points ce qui rend le calcul précis mais interdit le traitement de discontinuité.

Le schéma numérique donné par la relation (2.12) est centré, ce qui permet de récupérer de l'information sur un nombre minimal de points, par rapport à d'autres schémas à droite ou à gauche. La figure 2.2 donne une représentation schématisée de l'algorithme de dérivation dont la précision importante découle du nombre de points qui fournissent de l'information. Malheureusement, la précision du calcul et l'aptitude à traiter convenablement des discontinuités requièrent des conditions incompatibles. Une dérivation où interviennent de nombreux nœuds s'apparente à un processus de moyenne et donc au lissage d'une discontinuité éventuelle. En revanche un haut degré de précision permet de s'affranchir des problèmes d'amortissement et de déphasage d'onde d'origine numérique.

L'algorithme de dérivation est donné pour une fonction d'une seule variable mais il est évident qu'il convient également à des fonctions de plusieurs variables ; dans la relation (2.12), la quantité u peut dépendre des trois variables d'espace et pour chacune des directions on peut utiliser un schéma de dérivation du même type. Par exemple, pour l'équation d'évolution conservative d'une grandeur physique u nous calculons :

$$\frac{du_i}{dt} = \left. \frac{dF_x}{dx} \right|_{(i,j,k)} + \left. \frac{dF_y}{dy} \right|_{(i,j,k)} + \left. \frac{dF_z}{dz} \right|_{(i,j,k)},$$

où F_x , F_y et F_z sont les trois composantes du flux de la quantité u et où d/dx , d/dy et d/dz sont les opérateurs de dérivation numériques (2.12) portant respectivement sur les indices i , j , k définis par $u_{i,j,k} \equiv u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$.

Pour terminer sur le schéma spatial nous souhaitons souligner qu'il vérifie $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0$ exactement — c'est-à-dire à la précision de calcul de la machine et non au quatrième ordre en Δx , Δy ou Δz . Cela se vérifie simplement parce que les opérateurs de dérivation suivant les trois variables d'espace commutent. Ainsi le traitement du potentiel vecteur prend tout son intérêt : si les conditions initiales ne possèdent pas de monopôle magnétique, le code ne va pas en créer de façon artificielle. Il faut toutefois préciser que cette propriété n'est a priori valable qu'en géométrie cartésienne c'est-à-dire lorsque le calcul de la divergence du rotationnel se développe comme la commutation d'opérateurs.

2.2.4 Schéma d'intégration en temps

Il est impossible de connaître numériquement chaque grandeur physique caractérisant un fluide en tout point de l'espace ; si, de plus, nous considérons le caractère évolutif du système, pour des raisons identiques nous ne pourrions évidemment pas déterminer ces mêmes grandeurs physiques à tout instant. Comme l'espace, le temps doit être discret ; un intervalle de temps Δt va séparer deux instants consécutifs auxquels les caractéristiques du milieu étudié seront déterminées. À un instant t donné, une fois que l'ensemble des termes présents dans les équations de la MHD est calculé sur tous les nœuds du maillage, nous pouvons procéder au calcul de ces quantités à l'instant ultérieur $t + \Delta t$. Pour cela nous passons par un schéma d'intégration temporel, également aux différences finies, qui permet de résoudre des EDOs de la forme (2.9) :

$$\frac{du^n}{dt} = H^n(u), \quad (2.13)$$

telles que celles données par la MHD ; il s'agit de la seconde phase de l'approche MOL de résolution des EDPs. Pour simplifier les écritures, nous utilisons la notation qui consiste à remplacer la variable temps par un indice : $u(n\Delta t) \equiv u^n$.

Schéma d'Adams-Bashforth

Le premier schéma que nous avons utilisé est un schéma à pas d'intégration temporelle constant, du troisième ordre, que l'on obtient à nouveau par des développements de Taylor. Pour calculer la fonction u à l'instant $n + 1$, nous allons non seulement avoir besoin de u^n et H^n mais également de H^{n-1} et H^{n-2} . À partir des développements limités en temps suivants :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + H^n \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^n \Delta t^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 u}{dt^3} \right|^n \Delta t^3 + o(\Delta t^4), \\ H^{n-1} &= \left. \frac{du}{dt} \right|^{n-1} = H^n - \left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^n \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^3 u}{dt^3} \right|^n \Delta t^2 + o(\Delta t^3), \\ H^{n-2} &= \left. \frac{du}{dt} \right|^{n-2} = H^n - 2 \left. \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^n \Delta t + 2 \left. \frac{d^3 u}{dt^3} \right|^n \Delta t^2 + o(\Delta t^3), \end{aligned}$$

un calcul algébrique élémentaire conduit au calcul de u à l'itération $n + 1$:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{23H^n - 16H^{n-1} + 5H^{n-2}}{12} + o(\Delta t^4). \quad (2.14)$$

La stabilité de ce schéma numérique appliqué aux équations de la MHD n'a pas été étudiée explicitement ; en appliquant une condition CFL (présentée dans la section 1.2) et en introduisant de la dissipation numérique, nous avons constaté de façon empirique que le programme permet de décrire l'évolution d'un plasma MHD. Toutefois, comme nous le montrerons par la suite, le schéma temporel et le schéma spatial que nous avons définis conduisent à des restrictions sévères sur les détails des profils que peut nous apporter une simulation.

Schéma de Hyman

Nous avons tenté d'effectuer des simulations de l'instabilité MRI durant lesquelles une turbulence stationnaire doit s'établir après la saturation du mécanisme déstabilisant. Durant la phase de croissance de l'instabilité, les conditions physiques au sein du plasma changent considérablement ; en particulier l'énergie magnétique voit son amplitude croître de près de deux décades. Par conséquent, la vitesse d'Alfvén voit sa valeur subir d'importantes variations ce qui pose évidemment un problème dans le traitement de la condition CFL. Pour mener à terme ce type de simulations il faut soit partir avec une condition CFL très restrictive prévoyant l'augmentation de la vitesse de propagation de l'information dans le développement futur de la simulation, soit permettre au pas de temps de s'adapter au cours du calcul. La première possibilité n'est bien sûr pas satisfaisante dans la mesure où d'une part il faut intuitivement les valeurs de saturation du champ magnétique, et d'autre part il faut passer une fraction importante de la simulation à calculer suivant des petits pas de temps alors que cela n'est a priori pas nécessaire (en particulier dans la phase de développement linéaire). Pour cette raison, nous avons cherché à remplacer le schéma d'intégration temporelle d'Adams-Bashforth à pas de temps constant par un schéma à pas variable proposé par Hyman (1979).

Ce schéma numérique présente d'intéressantes propriétés de stabilité et de précision dans le traitement des équations d'Euler et suivant les travaux de Galsgaard (1995) nous avons cherché à l'utiliser dans le cadre des équations de la MHD. C'est une méthode itérative à pas multiples ou IMS⁴, de type prédicteur-correcteur, dont l'algorithme se décompose en deux étapes — lorsque les équations sont non linéaires la résolution de l'EDO ne peut évidemment se ramener à une inversion de matrice. Premièrement, durant l'étape de « prédiction » on évalue u^{n+1} à partir de u^n au moyen d'un schéma d'ordre k , puis dans la seconde étape, dite de « correction » on applique un algorithme d'ordre $k + 1$ qui vient affiner le calcul en combinant l'information connue au temps n et celle donnée par la phase de prédiction. En principe, il est possible de réitérer la procédure de correction afin de gagner en précision et en stabilité mais, en pratique, les valeurs des coefficients des schémas ne sont pas toujours connues ; nous notons $u_{(k)}^{n+1}$ le résultat d'une k -ième itération.

Pour les deux étapes de prédiction et de correction, suivant Hyman (1979), nous avons utilisé des schémas numériques de type « leapfrog », illustrés par la figure 2.3. Pour une équation de la forme (2.13), le membre de droite H est calculé au temps n , tandis que la dérivée temporelle ne fait pas intervenir u^n mais seulement u^{n+1} ainsi que les valeurs antérieures⁵ de u , en l'occurrence u^{n-1} .

Le premier intérêt que nous avons trouvé au schéma d'intégration de prédicteur-correcteur de Hyman est de posséder une version à pas de temps variable. Δt devient donc une fonction

4. IMS pour « iterative multistep ».

5. Les pas de temps qui interviennent dans la dérivée temporelle évitent — ou sautent — le pas de temps où l'on calcule le membre de droite (i.e. les flux) ; cette idée explique la terminologie « leapfrog » employée pour caractériser cette classe de schéma.

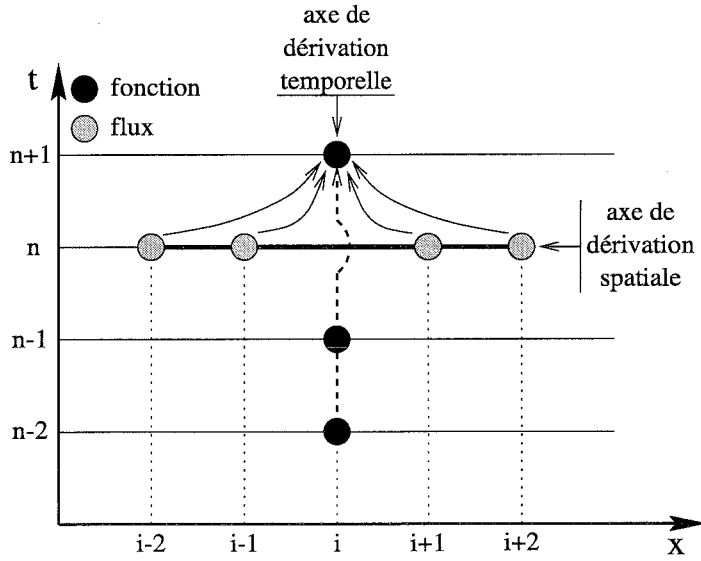


FIG. 2.3 – Présentation d'un schéma d'intégration « leapfrog ». La dérivation temporelle ne considère pas l'information à l'instant auquel les flux sont calculés.

du temps, ce qui nous conduit à définir $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ puis le paramètre :

$$r = \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} = \frac{t^{n+1} - t^n}{t^n - t^{n-1}},$$

qui décrit l'importance de la variation de Δt .

Étape de prédiction :

Le schéma prédicteur du deuxième ordre s'écrit :

$$u_{(1)}^{n+1} = (1 - r^2)u^n + r^2 u^{n-1} + \Delta t^n (1 + r) H^n + o(\Delta t^3);$$

ainsi, connaissant u^n au temps t^n , nous calculons les valeurs de H^n puis nous en déduisons l'estimation $u_{(1)}^{n+1}$ au temps t^{n+1} . Dans une simulation, le pas de temps doit varier très peu d'une itération à l'autre, r reste donc très proche de l'unité et le schéma est quasiment « leapfrog » centré en temps — cela devient exact lorsque $r = 1$.

Étape de correction :

Une fois que nous avons une estimation $u_{(1)}^{n+1}$ nous pouvons la corriger pour calculer $u^{n+1} = u_{(2)}^{n+1}$ par un algorithme du troisième ordre :

$$u_{(2)}^{n+1} = \frac{1}{2 + 3r} \left[(2 - r)(1 + r)u^n + r^3 u^{n-1} + \Delta t(1 + r)^2 H^n + \Delta t(1 + r)^2 H_{(1)}^{n+1} \right] + o(\Delta t^4),$$

dans lequel nous devons calculer $H_{(1)}^{n+1}$, qui est la valeur du membre de droite pour $u_{(1)}^{n+1}$. Afin d'accroître la stabilité de ce schéma il est possible ensuite d'appliquer des corrections de façon itérative par des opérations récurrentes de la forme :

$$u_{(k)}^{n+1} = u_{(k-1)}^{n+1} + C_k \Delta t \left(H_{(k-1)}^{n+1} - H_{(k-2)}^{n+1} \right),$$

où les différents coefficients C_k , connus pour $r = 1$ sont :

$$C_k = \left[\frac{3}{10}, \frac{7}{30}, \frac{4}{21}, \frac{451}{2800}, \frac{314}{2255}, \frac{1153}{9420}, \frac{126}{1153} \right], \quad \text{pour } k \in [3, 9].$$

En pratique, nous n'avons bien entendu appliqué que deux itérations, le prédicteur et le correcteur — le prédicteur seul est instable — afin de conserver des temps de calcul raisonnables. En outre Hyman (1979) montre que le nombre d'itérations n'augmente pas la précision du calcul mais seulement l'étendue spectrale de la région de stabilité que l'on assure de toute façon en vérifiant une condition CFL.

2.3 Traitement des frontières

Les études de MHD numérique qui nous intéressent font partie de la classe des problèmes aux valeurs initiales ; leur résolution nécessite de passer par toutes les étapes présentées jusqu'ici, à savoir, définir les variables caractéristiques du problème et leurs équations d'évolution puis trouver le schéma numérique le plus approprié au travail que l'on souhaite effectuer. Nous nous donnons ensuite les valeurs des grandeurs physiques sur la totalité du maillage afin de définir les conditions initiales, propres à la simulation, avant de démarrer le calcul.

Il reste cependant un point à préciser ; le calcul numérique porte sur une région finie de l'espace et il est donc nécessaire de définir comment la boîte de simulation est couplée avec l'extérieur. Dans notre cas, ce couplage va se faire à travers l'algorithme aux différences finies qui nous permet d'évaluer les dérivées spatiales. En effet, dans ce schéma centré du quatrième ordre, la dérivée est construite à partir de l'information provenant des deux nœuds voisins, de part et d'autre du point considéré ; l'échange d'information entre l'intérieur et l'extérieur se fait donc, à la frontière, via la prescription que l'on se donne pour définir la valeur des deux points non contenus dans le maillage⁶.

De façon formelle, la dérivée spatiale numérique s'écrit comme :

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = A\bar{u} + \bar{C}_l, \quad (2.15)$$

où \bar{u} est un vecteur dont les composantes sont données par les valeurs de la fonction u en chaque nœud de la grille et où A est matrice de dérivation déduite de (2.12) :

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 & & & \\ -8 & 0 & 8 & -1 & & \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ & & & 1 & -8 & 0 & 8 \\ & & & & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Pour rendre le discours plus clair, nous raisonnons sur un espace unidimensionnel, mais toutes les propriétés présentées se généralisent directement à trois dimensions.

Le traitement des frontières est décrit par le vecteur \bar{C}_l dont les deux premières et les deux dernières composantes (les seules non nulles) permettent de dériver respectivement u_1 , u_2 , u_{n-1} puis u_n .

Les conditions aux limites sont de deux natures différentes. D'une part elles peuvent traduire un apport d'information depuis l'extérieur vers la grille de simulation, on parle alors de conditions aux limites physiques ; d'autre part, leur rôle est parfois, simplement, de permettre un calcul numérique à la frontière, ces conditions aux limites sont dites numériques — elles déterminent la façon dont la boîte de simulation va communiquer de l'information à l'extérieur.

Le choix des conditions aux limites est déterminant dans l'élaboration d'un code numérique, afin de rendre le problème « bien posé » ; elles doivent rester compatibles avec la physique du problème simulé, mais aussi avec les propriétés mathématiques du système d'équations à résoudre et ne doivent pas altérer les schémas numériques. Ce sont les propriétés du transport de l'information qui guident leur choix.

2.3.1 Conditions aux limites physiques

Cette forme de conditions aux limites consiste à imposer le comportement des nœuds aux frontières au cours du temps, c'est-à-dire à guider l'évolution de la simulation par un flux constant d'information. On peut se représenter les conditions aux limites physiques comme des contraintes sur le développement du calcul, et, lorsqu'aucune condition physique n'est appliquée aux frontières, on parle de conditions aux limites libres ; ces dernières ne doivent théoriquement pas réfléchir les ondes qui sortent de la grille.

Conditions de Dirichlet

Les conditions aux limites de Dirichlet fixent les valeurs prises par une quantité physique sur la frontière — dans notre cas il s'agit des deux premiers et des deux derniers points de grille — et bien entendu ces valeurs peuvent évoluer dans le temps. Par ces conditions on peut par exemple maintenir des flux (entrant ou sortant) ou au contraire les annuler.

Conditions de Neumann

Comme les conditions de Dirichlet, les conditions aux limites de Neumann imposent certaines caractéristiques physiques sur les frontières, mais ici, plutôt que les variables elles-mêmes, on fixe leurs gradients. Il est ainsi possible, par exemple, de maintenir la divergence de la vitesse nulle sur les frontières.

2.3.2 Conditions aux limites numériques

Les conditions aux limites numériques sont établies afin de pouvoir effectuer les calculs aux différences finies sur chaque frontière lorsqu'aucune condition physique n'est imposée.

Ces opérations doivent bien entendu se faire tout en respectant à la fois le contexte physique et les algorithmes numériques. Les conditions numériques vont déterminer comment de l'information se propageant dans la boîte de simulation va pouvoir s'en échapper mais elles vont également décrire le devenir de cette information.

Conditions périodiques

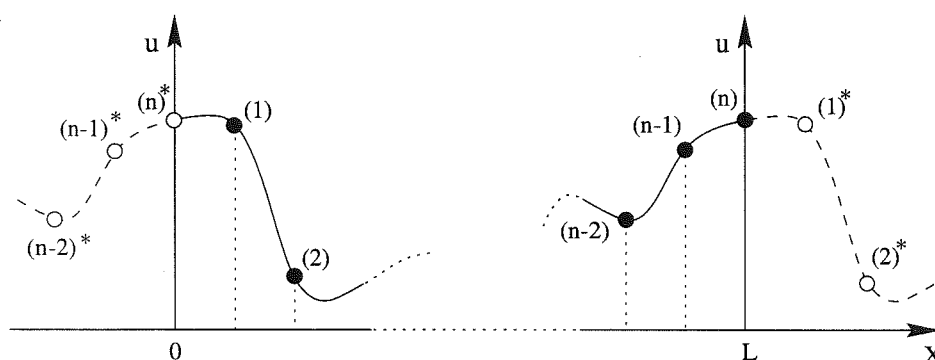


FIG. 2.4 – Conditions aux limites périodiques.

Appliquer des conditions aux limites périodiques dans une simulation revient à paver la totalité de l'espace avec comme motif élémentaire la boîte de simulation. La méthode de construction des nœuds à la frontière est présentée sur la figure 2.4, qui montre en outre clairement que l'information sortant d'un bord rentre de l'autre côté — en provenance d'une boîte virtuelle, identique à la grille simulée.

Il est très simple de mettre en place ces conditions aux limites mais elles ne se prêtent pas à tout type de simulation. D'une part elles discrétisent les modes pouvant exister dans la boîte dont la taille fixe la longueur d'onde maximale ; d'autre part elles contraignent de façon sévère l'évolution de certaines grandeurs physiques telles que le champ magnétique moyen (ou son flux) qui demeure constant.

Le vecteur traduisant l'effet de conditions aux limites périodiques dans la relation (2.15) est de la forme :

$$\bar{C}_l = \frac{1}{12\Delta x} \begin{bmatrix} (u_{n-1} - 8u_n) & u_n & 0 & \dots & 0 & -u_1 & (8u_1 - u_2) \end{bmatrix}^T.$$

Conditions symétriques

Comme nous le montrons sur la figure 2.5, imposer des conditions aux limites symétriques consiste à appliquer un miroir à chaque frontière ; cette manipulation permet donc aisément de reconstruire virtuellement les points manquants aux calculs des dérivées.

Sur le plan du transport de l'information, cette opération laisse les ondes traverser la frontière, mais elles sont aussitôt réintroduites dans la boîte de simulation par le bord d'où elles sont sorties : les conditions aux limites symétriques sont donc réfléchissantes. Comme

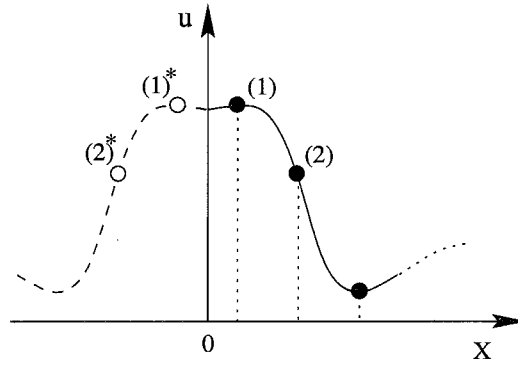


FIG. 2.5 – Conditions aux limites symétriques.

pour les conditions périodiques lorsque les frontières sont symétriques, la longueur d'onde des modes est majorée mais dans le cas présent la longueur maximale est le double de la taille de la boîte.

En pratique ces conditions sont implémentées dans le code en introduisant le vecteur :

$$\bar{C}_l = \frac{1}{12\Delta x} \begin{bmatrix} (-8u_1 + u_2) & u_1 & 0 & \dots & 0 & -u_n & (8u_n - u_{n-1}) \end{bmatrix}^T.$$

Elles peuvent également être données en plaçant le « miroir » sur un nœud, dans ce cas on trouve alors :

$$\bar{C}_l = \frac{1}{12\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & +u_2 & 0 & \dots & 0 & -u_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Conditions anti-symétriques

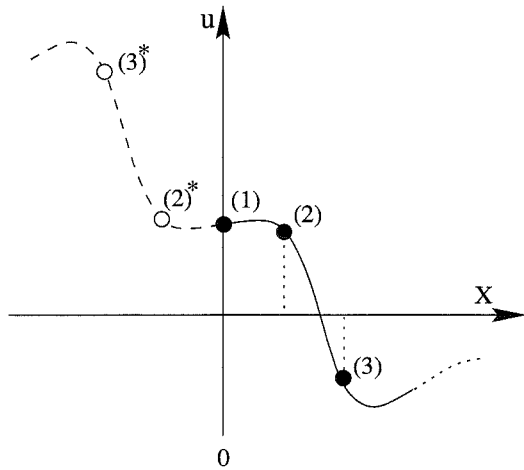


FIG. 2.6 – Conditions aux limites anti-symétriques.

Une autre méthode que nous avons implémentée pour traiter les conditions aux limites numériques consiste à anti-symétriser les fonctions à la frontière ; nous décrivons sur la figure 2.6 comment, par cette opération, les points de grilles sont extrapolés.

Physiquement cette opération revient à ajouter, à une onde sortant de la boîte, une onde entrante, telles que leurs profils se compensent exactement. Théoriquement, les noeuds peuvent donc évoluer librement sur la frontière sans que globalement aucune information ne soit échangée entre l'extérieur et l'intérieur de la boîte de simulation. Sur le plan numérique cette classe de conditions aux limites est très intéressante dans la mesure où de l'information peut sortir de la

grille de simulation mais n'est pas réinjectée. Elle s'apparente donc à des conditions aux limites libres.

Il faut cependant faire très attention aux artéfacts que de telles conditions peuvent introduire dans une simulation. En effet, la précision limitée du calcul par des différences finies produit, au bord, des erreurs qui donnent inmanquablement naissance à une onde réfléchie. Malgré la très faible amplitude de cette onde, lorsqu'après avoir parcouru la grille elle rejoint la seconde frontière, par raison de symétrie, les conditions aux limites reconstruisent une onde similaire à l'onde initiale (mais inversée) à partir de ces petites perturbations. Nous

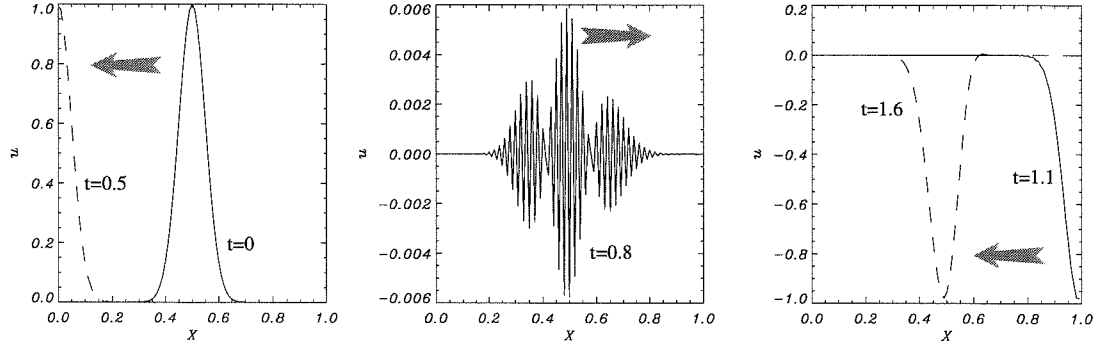


FIG. 2.7 – Artéfact dû aux conditions aux limites anti-symétriques.

avons représenté ce phénomène sur la figure 2.7 qui montre à différents instants la solution de l'équation linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = +c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.16)$$

où la vitesse de propagation, $c = 1$ et où u a un profil gaussien. Lorsque le front sort de la grille vers la gauche, des erreurs de très faible amplitude sont propagées vers la droite ; quand elles rencontrent la seconde frontière, les conditions aux limites anti-symétriques reconstruisent cette « information » pour générer un front inverse du premier mais de même amplitude. La solution de ce problème réside dans le choix approprié de la forme du terme de dissipation numérique ; celui-ci doit agir préférentiellement sur les oscillations à l'échelle du pas spatial afin d'éliminer l'information parasite.

Pour inclure ces conditions dans les algorithmes nous devons introduire le vecteur :

$$\bar{C}_l = \frac{1}{12\Delta x} \begin{bmatrix} -14u_1 + 8u_2 - u_3 \\ 2u_1 - u_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2u_n - u_{n-1} \\ -14u_n + 8u_{n-1} - u_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Les précédents types de conditions aux limites que nous avons discutés présentent tous l'avantage de traiter les frontières avec les mêmes schémas numériques que le reste de la

grille. Pour des systèmes linéaires, il est démontré que l'on peut traiter les bords avec un schéma moins précis que l'intérieur du maillage, sans changer les caractéristiques de précision et de stabilité du schéma numérique interne ; mais dans le cas d'équations non linéaires cette proposition n'est plus vraie.

En outre, pour des équations non linéaires, l'influence des conditions aux limites numériques peut parfois devenir dominante sur la stabilité, la précision et la convergence de nombreux schémas numériques.

2.4 Différentes configurations géométriques

Pour résoudre un problème numériquement il est bien entendu très avantageux de guider les schémas d'intégration dans leur manière de traiter l'information, en y introduisant certaines caractéristiques physiques du système modélisé. Cela peut se faire d'une part directement au niveau de l'algorithmique comme dans les méthodes de caractéristiques, les méthodes « upwind » ou lorsque l'on impose à la dissipation artificielle de respecter une phénoménologie physique. D'autre part, on peut acquérir un gain en précision et en stabilité si l'on donne au maillage qui quadrille l'espace une structure la plus proche possible de celle du système réel étudié et en accord avec les processus que l'on attend — cet aspect est à la base des méthodes numériques de type éléments finis. Dans nos schémas aux différences finies, nous avons donc toujours cherché à écrire les équations de la MHD dans une géométrie adaptée au problème regardé, cela en réécrivant le système des équations dans un jeu de variables approprié physiquement à la géométrie et aux symétries.

2.4.1 Géométrie cartésienne

Pour différents types d'études nous avons été amené à considérer des maillages cartésiens. Cette discrétisation de l'espace est très couramment utilisée car elle simplifie généralement les équations à traiter du fait de l'invariance des vecteurs de base par translation, au contraire des systèmes de coordonnées curvilignes. En outre, la fréquence du choix des coordonnées cartésiennes dans les simulations numériques est due à ce qu'en analyse numérique un grand nombre d'études de schémas ne considère que ce type d'algorithme — la plupart des maillages en coordonnées curvilignes peuvent être ramenés de façon théorique à une géométrie cartésienne.

A priori, il est possible d'effectuer toute simulation en géométrie cartésienne à condition de posséder une résolution spatiale suffisante, mais les consommations de temps de calcul et d'espace de stockage de l'information peuvent rapidement devenir prohibitives. Pour des simulations portant sur des fluides en rotation nous voyons sur la figure 2.8 comment d'un noeud à l'autre des quantités physiques axisymétriques peuvent considérablement varier et donc induire d'importantes erreurs dans les schémas de dérivation spatiale. En revanche, loin de l'axe de rotation, on constate que l'approximation cartésienne permet une description relativement correcte.

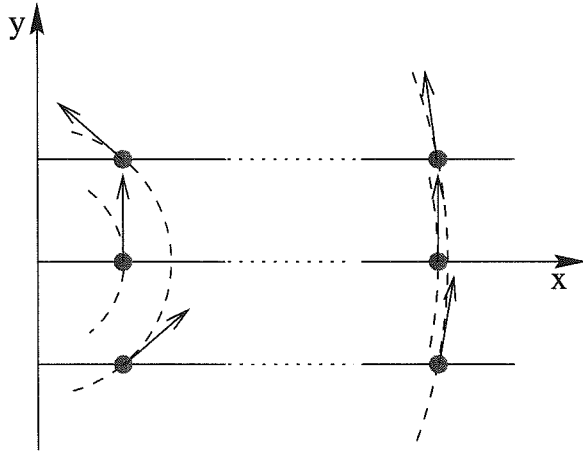


FIG. 2.8 – Description cartésienne d'un flot rotationnel. On voit qu'au voisinage de l'axe de rotation la représentation cartésienne n'est absolument plus adaptée pour décrire la physique du flot.

2.4.2 Approximation « shearing sheet »

La simulation d'une turbulence entretenue est un objectif ambitieux que nous souhaitons atteindre à travers nos développements numériques. Afin de produire cette turbulence, nous nous sommes intéressés au développement de l'instabilité magnéto-rotationnelle. De nombreuses simulations telles que celles mentionnées dans la section I-3.1 ont montré que cette instabilité est un mécanisme très prometteur pour rendre turbulent un disque d'accrétion faiblement magnétisé.

Nous ne souhaitons pas effectuer de simulation globale mais plutôt nous restreindre à des simulations locales. Or, comme le montre la figure 2.8, dans les disques d'accrétion, lorsque l'on se place loin de l'objet central, il devient licite d'approximer la géométrie cylindrique locale à une géométrie plane. Si, au voisinage d'un point situé à une distance r_o du centre de rotation, on assimile les vecteurs de la base cylindrique $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ aux vecteurs cartésiens $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, les coordonnées (r, θ, z) sont remplacées par les coordonnées cartésiennes définies comme $(x = r - r_o, y = r\theta, z)$; dans les calculs on commet alors simplement une erreur en x/r_o .

Ce cadre d'approximation, appelé « shearing sheet », que nous schématisons sur la figure 2.9, est adapté au traitement des milieux en rotation différentielle; il fut développé par Goldreich & Lynden-Bell (1965) pour des études de dynamique galactique, mais se prête très bien au contexte des disques d'accrétion. En plus de considérer une géométrie locale cartésienne, dans l'approximation « shearing sheet » les équations de la MHD sont établies dans le référentiel, situé en r_o , qui suit le mouvement de rotation de la matière. Le dernier point de cette approximation consiste à linéariser le cisaillement de vitesse.

Malgré la géométrie cartésienne, dans les équations du mouvement nous conservons les termes de force issus de la rotation de la matière, à savoir la force de Coriolis et celle d'inertie; ainsi la contrainte qui vient compléter l'équation du mouvement (2.2) s'écrit simplement :

$$\vec{f} = \rho \vec{g} + \rho r \Omega_o^2 \vec{e}_r - 2\rho \vec{\Omega}_o \times \vec{v},$$

où l'on reconnaît successivement les forces de gravité, d'inertie et de Coriolis, avec Ω_o la vitesse

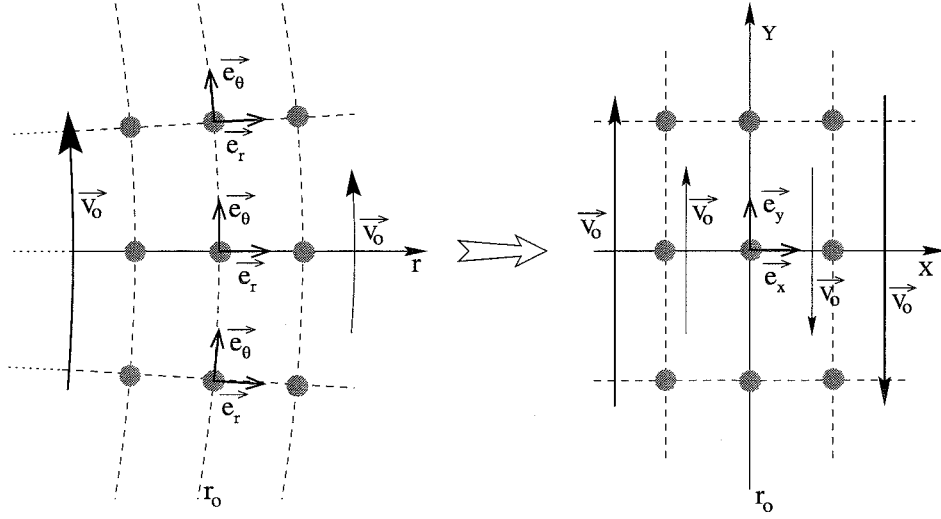


FIG. 2.9 – Description de l'approximation « shearing sheet ». On se place dans le référentiel suivant le flot au rayon r_o , la géométrie locale est considérée cartésienne et le cisaillement de vitesse de la matière est linéarisé.

angulaire de la matière en r_o . En considérant un disque d'accrétion mince, nous pouvons effectuer un développement limité de la gravité à l'ordre 2 en z/r :

$$\vec{g} = -\frac{GM_*}{R^2}\vec{R} \sim -r\Omega^2\left(\vec{e}_r + \frac{z}{r}\vec{e}_z\right),$$

où le rayon vecteur est donné par $\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et où $\Omega = \sqrt{GM_*/r^3}$ est la vitesse angulaire keplerienne sur le plan du disque. Nous pouvons ainsi calculer la résultante de la force d'inertie et de la gravité en direction radiale, compte tenu de la linéarisation du cisaillement de vitesse :

$$r(\Omega^2 - \Omega_o^2) = 2qx\Omega_o^2,$$

où $q = -d\ln\Omega/d\ln r$ ($q = 3/2$ pour un système keplerien) et où la coordonnée $x = r - r_o$ détermine la position du point considéré dans le référentiel cartésien. Finalement, si l'on néglige la stratification verticale (i.e. g_z), on obtient pour la force \vec{f} :

$$\vec{f} = 2qx\Omega_o^2\vec{e}_x - 2\rho\vec{\Omega}_o \times \vec{v}. \quad (2.17)$$

Dans les études locales, on s'intéresse au développement d'instabilités dont les longueurs d'ondes caractéristiques restent très petites devant les échelles globales du disque. La physique locale contrôle l'évolution de ces modes mais ils restent insensibles aux conditions aux bords du système. Dans ce contexte il devient naturel d'appliquer aux simulations numériques des conditions aux limites périodiques ; la taille de la boîte de simulation fixe la longueur du mode le plus grand que le calcul peut faire évoluer, ce qui traduit le caractère local de cette approche. Cependant, dans le cas de l'approximation « shearing sheet », les conditions aux limites doivent être périodiques, mais seulement dans le référentiel lagrangien qui suit

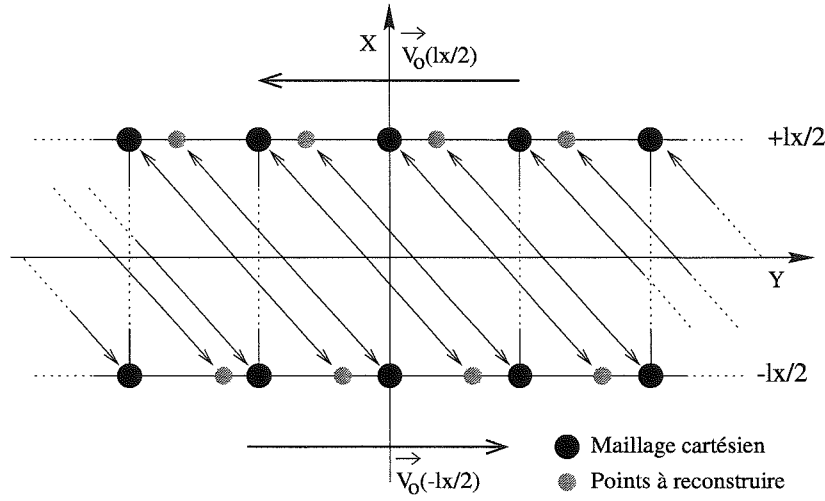


FIG. 2.10 – Dans l'approximation « shearing sheet » il n'est pas possible d'avoir une relation directe entre les nœuds du maillage aux limites internes et externes.

le mouvement keplerien de la matière. En direction azimuthale les conditions aux limites périodiques sont triviales, mais comme le montre la figure 2.10, leur application n'est pas directe suivant l'axe X , elle ne peut se déduire d'une correspondance point à point ; compte tenu de l'advection de la matière, sur les bords interne et externe il faut évaluer la valeur des quantités physiques entre les noeuds du maillage cartésien par des méthodes d'interpolation qui peuvent introduire et propager des erreurs dans la simulation.

Nous avons expérimenté une autre solution qui consiste à se placer, en tout point de la boîte de simulation, dans le référentiel qui suit le mouvement non perturbé de la matière et non plus dans le référentiel en corotation avec le plasma situé en r_o ; pendant un temps t , la distance parcourue par un élément fluide dans le référentiel en corotation est

$$l = v_o t = r(\Omega(r) - \Omega(r_o))t = -q x \Omega_o t.$$

On en déduit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \hat{x} = x \\ \hat{y} = y + q x \Omega_o t \\ \hat{z} = z \\ \hat{t} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + q \Omega_o t \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + q x \Omega_o \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \end{cases}$$

La dernière relation donne la dérivée lagrangienne d'équilibre, $\partial/\partial \hat{t} = \partial/\partial t + v_o \partial/\partial y$ et revient simplement à recalculer la vitesse du fluide dans le nouveau référentiel, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_o$.

À présent, nous pouvons donc appliquer des conditions aux limites périodiques simples si nous remplaçons, dans les équations de la MHD, les opérateurs de dérivation en espace par

leurs nouvelles expressions (notées $\tilde{\cdot}$), sans omettre d'introduire la force (2.17). L'évolution du plasma est donc décrite par les relations :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \rho = -\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{p}} - q \Omega_{\odot} t \frac{\partial p_x}{\partial \tilde{y}}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\vec{p}} = & -\tilde{\nabla} \cdot \left[\frac{\overline{p\vec{p}}}{\rho} + \left(P + \frac{B^2}{2} \right) \vec{I} - \overline{B\vec{B}} \right] \\ & - q \Omega_{\odot} t \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{p_x \tilde{\vec{p}}}{\rho} - B_x \vec{B} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(P + \frac{B^2}{2} \right) \vec{e}_x \right] + 2 q x \Omega_{\odot}^2 \vec{e}_x - 2 \rho \vec{\Omega}_{\odot} \times \tilde{\vec{v}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(P \rho^{(1-\gamma)} \right) = -\tilde{\nabla} \cdot (P \rho^{-\gamma} \tilde{\vec{p}}) - q \Omega_{\odot} t \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} (P \rho^{-\gamma} p_x). \quad (2.20)$$

Quant à l'évolution du potentiel vecteur, elle est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{v}_b \times \vec{B} + \vec{u} \times \vec{B};$$

or nous pouvons développer le premier produit vectoriel comme :

$$\vec{v}_b \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (v_b A_y) - v_b \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} - A_y \frac{dv_b}{dx} \vec{e}_x,$$

pour en définitive aboutir à l'équation :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tilde{t}} = \vec{u} \times \vec{B} + q \Omega_{\odot} A_y \vec{e}_x, \quad (2.21)$$

où par un choix de jauge, nous avons éliminé $\nabla (v_b A_y)$ (\vec{A} est défini à un gradient près).

Cette méthode permet d'appliquer, simplement, des conditions aux limites périodiques exactes sur la grille de simulation ; cependant, nous pouvons voir dans les équations [2.18-2.20] que le cisaillement du fluide introduit un terme séculaire, linéaire en temps, qui peut potentiellement conduire à d'importantes erreurs de calcul numérique. Toutefois, en respectant la condition CFL, il est possible d'ajuster le pas temporel Δt , de façon à ce qu'après un certain nombre d'itérations le chemin parcouru par la frontière interne (ou externe) dans le référentiel en corotation soit strictement égal à sa longueur : $L_y = q \Omega_{\odot} n \Delta t L_x / 2$. Il est alors possible d'effectuer une permutation sur les nœuds du maillage puis de relaxer le terme séculaire en considérant cette nouvelle configuration comme un état initial ($t=0$). La seule restriction de cette solution est qu'elle nécessite d'avoir autant de nœuds dans la direction y que dans la direction x — la véritable condition est d'avoir $n_y/n_x = k, k \in \mathbb{N}^*$.

2.5 Nécessité de la dissipation numérique

Les schémas numériques qui nous servent à intégrer les équations de la MHD sont évidemment stables sous réserve de vérifier une condition CFL (décrite dans la section 1.2). Néanmoins, dans certaines conditions, du fait des erreurs des calculs aux différences finies,

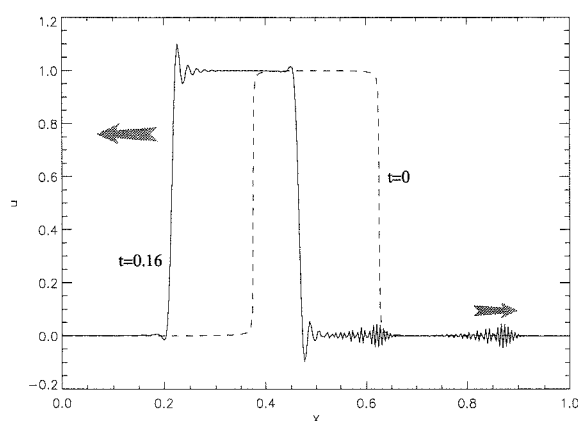


FIG. 2.11 – *Problèmes liés au traitement de discontinuités par des schémas numériques d'ordre élevé.*

des ondes de hautes fréquences sont susceptibles d'exister dans la boîte, et compte tenu de la forte non linéarité inhérente au système des équations MHD, ces modes peuvent conduire à des instabilités numériques. Or, dans l'évolution physique des systèmes que l'on simule il peut apparaître des structures très abruptes, dont les spectres de Fourier contiennent des fréquences élevées. Cette probabilité est d'autant plus accentuée que, dans les simulations numériques de MHD idéale, nous ne considérons aucun processus dissipatif — tels que les frottements visqueux ou la consommation de courant par effet Joule — susceptible d'éliminer les petites échelles.

De part leur construction, les algorithmes aux différences finies sont de moins en moins exacts à mesure que l'on traite de fonctions à variations de plus en plus rapides (devant l'échelle de discrétisation) ; sur des modes $A \sin(\Phi(x, t))$, les erreurs de calculs se traduisent par de la dispersion (déphasage du mode, i.e. erreur sur la célérité), de la dissipation (amortissement du mode) voire une instabilité (amplification du mode). En présence de discontinuité, les schémas aux différences finies d'ordre élevé sont généralement plus sensibles à la dispersion des modes de hautes fréquences qu'à leur amortissement. Comme le montre la figure 2.11 obtenue par la simple résolution de l'équation linéaire (2.16) sur une fonction carrée (i.e. à bords francs), le calcul fait apparaître des oscillations, à l'échelle du pas de discrétisation spatial — la plus haute fréquence que la grille autorise, compte tenu du critère de Nyquist — dues aux erreurs sur la vitesse de propagation des modes de petites longueurs d'ondes ; la conservation de la raideur des profils dénote la dissipation négligeable de l'algorithme. Ces oscillations peuvent continuer à croître ou se propager vers les frontières de la simulation et interagir avec les conditions aux limites. De façon générale, dans une simulation, lorsque de telles oscillations prennent naissance, elles croissent et contaminent rapidement la totalité de la grille de simulation ; le calcul perd alors tout sens physique.

Les processus dissipatifs, de nature physique, atténuent ces problèmes de part leurs propriétés à adoucir les gradients. Mais ceux-ci ne suffisent pas généralement dans les milieux turbulents, d'autant plus que leur contrôle est très difficile.

Il est donc nécessaire d'utiliser un artifice, purement numérique, afin d'amortir les oscillations à l'échelle du pas de grille ou d'empêcher leur création. Ce processus de dissipation

numérique parfois appelé « viscosité numérique » ou encore « diffusion numérique » doit être en mesure de dissiper les petites échelles ou d'adoucir les gradients sans pour autant affecter de façon drastique le déroulement de la simulation numérique.

2.5.1 Dissipation élémentaire

La première prescription de viscosité numérique programmée consiste à introduire dans chaque équation suivie par le code un terme proportionnel au laplacien de la grandeur évoluant dans le temps :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_X + \kappa \Delta X, \quad (2.22)$$

où \vec{F}_X est le flux de la grandeur X et κ le coefficient de viscosité numérique, constant. En pratique, la partie conservative de l'équation donnée ci-dessus est résolue par les schémas aux différences finies décrits précédemment, mais nous ajoutons à la valeur calculée, X^{n+1} , une contribution provenant du terme de diffusion. L'équation de diffusion est simplement résolue par le schéma de Du Fort-Frankel, obtenu en appliquant un algorithme « leap frog » à l'équation de diffusion (ici unidimensionnelle) :

$$\frac{X_i^{n+1} - X_i^{n-1}}{2\Delta t} = \kappa \frac{X_{i+1}^n - 2X_i^n + X_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

où la dérivée seconde est calculée par un schéma aux différences finies précis à l'ordre 2 (donné par des développements de Taylor à l'ordre 4 sur X_{i+1} et X_{i-1}). Ce schéma est inconditionnellement instable, cependant une façon de le stabiliser est de moyenner dans le temps le terme central du laplacien : $X_i^n \rightarrow (X_i^{n+1} + X_i^{n-1})/2$. Ainsi, l'équation de diffusion 1D est résolue par un algorithme de la forme :

$$X_i^{n+1} - X_i^{n-1} = 2 \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} (X_{i+1}^n - (X_i^{n+1} + X_i^{n-1}) + X_{i-1}^n).$$

Finalement, si l'on considère un espace à trois dimensions, la contribution de l'équation de diffusion au résultat de l'itération $n+1$ s'exprime comme :

$$X^{n+1} = \frac{1 - \alpha - \beta - \gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma} X^{n-1} + \frac{\alpha}{1 + \alpha + \beta + \gamma} (X_{i+1}^n + X_{i-1}^n) \\ + \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta + \gamma} (X_{j+1}^n + X_{j-1}^n) + \frac{\gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma} (X_{k+1}^n + X_{k-1}^n),$$

où i , j et k font référence aux trois variables d'espace et où les coefficients de l'algorithme sont : $\{\alpha, \beta, \gamma\} = 2\kappa\Delta t / \{\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2\}$. Il faut noter que le schéma de Du Fort-Frankel est inconditionnellement stable, ce qui est une propriété rare pour les schémas explicites, en revanche, comme nous l'avons montré dans la section 1.2, il peut parfois s'avérer inconsistant (lorsque les pas spatiaux et temporels tendent vers zéro mais que leur rapport reste fini ; le problème est évité si l'on maintient α , β et γ constants).

Bien que cette méthode conduise effectivement à de la dissipation numérique, elle reste néanmoins peu satisfaisante dans la mesure où elle agit sur toutes les quantités physiques,

sans distinction d'échelles — les grandes structures sont lissées de la même façon que les oscillations à l'échelle du pas — et sans prendre en considération, localement, les besoins réels de dissipation.

2.5.2 Capture de chocs

Pour les raisons que nous venons de mentionner, nous nous sommes penchés vers des algorithmes alternatifs de dissipation numérique ; nous avons en particulier introduit des a priori physiques sur sa prescription. De nombreux contextes hydrodynamiques tendent naturellement à produire des discontinuités, ou chocs (sauts de pression, de densité et d'énergie interne répondant aux conditions de passage de Rankin-Hugoniot) ; dans les simulations il semble donc logique de chercher à prévenir leur formation en appliquant de la dissipation numérique de façon idoine. Les chocs découlent de la rencontre de deux composantes de fluide, d'énergies comparables, l'une en mouvement rapide et l'autre non, créant ainsi un saut de pression. Pour les études 1D, Von Neumann & Richtmyer (1950) ont donc proposé une forme de viscosité numérique limitant le raidissement des profils par un coefficient de dissipation proportionnel au gradient de vitesse :

$$q = \begin{cases} -l^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| & \text{si } \frac{\partial v}{\partial x} < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Dans cette relation, v est la vitesse du fluide, ρ sa densité et l la longueur typique de diffusion, de l'ordre de quelques pas de grille (suivant les caractéristiques du schéma spatial). Dans l'équation du mouvement la dissipation numérique s'ajoute naturellement au terme de flux sous la forme d'un tenseur de contraintes :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (F_{\rho v} + q).$$

Il est clair que ce tenseur de contraintes est de la même nature que le tenseur visqueux des équations de Navier-Stokes, mais ici la viscosité est proportionnelle à la compression du fluide — elle a une influence nulle lorsque le fluide se détend — et agit à l'échelle de la discrétisation spatiale.

Tscharnutter & Winkler (1979) ont proposé un prolongement de cette méthode dite de « capture de choc » en trois dimensions ; le coefficient de dissipation, important dans les zones de formation de choc et négligable ailleurs (l^2 est très petit) est maintenant proportionnel à la divergence de la vitesse — traceur de la compression. Quant au terme en $|\partial v / \partial x|$ de (2.23), il s'identifie à présent exactement avec la prescription physique des contraintes visqueuses ; finalement le tenseur de viscosité numérique — s'annulant pour des contractions homologues — s'écrit :

$$Q_{ij} = \begin{cases} l^2 \rho \nabla \cdot \vec{v} \left(\frac{\partial_i v_j + \partial_j v_i}{2} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \delta_{ij} \right) & \text{si } \nabla \cdot \vec{v} < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Comme pour les frottements visqueux, le transport artificiel de quantité de mouvement $(-\nabla \cdot \overline{Q})$ lié à cette formulation de la dissipation numérique s'accompagne d'un chauffage du milieu, dont il faut bien entendu tenir compte dans l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \varepsilon \vec{v}) - P \nabla \cdot \vec{v} - \overline{Q} : \overline{\nabla v}, \quad (2.25)$$

où le double produit contracté, $\overline{Q} : \overline{\nabla v}$, défini positif (donc physiquement correct), vaut en coordonnées cartésiennes :

$$Q_{ij} \partial^i v^j = l^2 \rho \nabla \cdot \vec{v} \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.26)$$

L'expression de l'énergie « visqueuse » en coordonnées sphériques est donnée par Tscharnuter & Winkler (1979) ; ces auteurs indiquent, en outre, que par expérience, $\overline{Q} : \overline{\nabla v}$ doit nécessairement être exprimé comme une somme de carrés, toute autre formulation de (2.26) conduisant à des instabilités numériques. Stone & Norman (1992a) implémentent également cette forme de dissipation artificielle pour les équations hydrodynamiques du code Zeus 2D. Cependant, ils suppriment les composantes non diagonales du tenseur \overline{Q} , ne souhaitant pas élargir les profils de cisaillement de vitesse mais seulement adoucir les fronts de chocs.

Un temps caractéristique de transport d'information est évidemment associé à ce processus de diffusion et nous devons donc tenir compte de cette nouvelle contrainte dans la condition CFL (assurant la stabilité des schémas explicites en temps). L'échelle de temps caractéristique de diffusion entre deux nœuds de la grille est donnée par (Hirsch, 1997a) :

$$\Delta t = \min \left(\frac{1}{2 l^2 \nabla \cdot \vec{v}} \right) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

$$= \frac{\Delta x^2}{6 l^2} \max (\nabla \cdot \vec{v})^{-1} \quad \text{lorsque } \Delta x = \Delta y = \Delta z. \quad (2.28)$$

Dans un code de MHD idéale la matière et le champ magnétique sont étroitement liés, il est donc naturel de penser que la dissipation numérique introduite dans l'équation du mouvement va se répercuter directement sur le champ magnétique. En général, il ne semble donc pas nécessaire d'introduire explicitement de la dissipation numérique sur l'équation d'induction. Cependant, il est possible de construire un terme de résistivité numérique proportionnel à l'amplitude du courant, prévenant ainsi la formation de couches étroites de variation du champ magnétique (i.e. de couches de courant).

2.5.3 Hyper-viscosité

L'approche de Von Neumann & Richtmyer (1950), puis Tscharnuter & Winkler (1979) consiste à limiter la formation d'oscillations à l'échelle du pas spatial en évitant la formation

de profils étroits; toutefois, compte tenu de la très petite valeur de $l^2 \nabla \cdot \vec{v}$ hors des chocs, cette méthode est inefficace pour dissiper des modes des hautes fréquences en dehors des discontinuités.

Nous avons donc tenté d'amortir les perturbations à l'échelle du pas de la grille durant leur propagation. Pour cela nous introduisons, dans un premier temps, un terme de diffusion de la même forme que celui donné par (2.22) — à une seule dimension pour simplifier l'exposé. Pour un mode de longueur d'onde λ , nous pouvons définir son temps caractéristique d'amortissement τ , par :

$$\frac{X}{\tau} = \kappa \frac{4\pi^2}{\lambda^2} X \Rightarrow \tau = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \kappa}.$$

Le mode se déplace à une vitesse c , ainsi $L = c\tau = c\lambda^2/4\pi^2\kappa$ définit sa longueur caractéristique d'amortissement. Introduisons également le coefficient sans dimension h , donné par $\kappa = h\Delta x c$, qui traduit la capacité plus ou moins grande de κ à dissiper sur des échelles Δx durant un pas de temps (cette prescription est utilisée dans le schéma de Du Fort-Frankel). Ainsi nous obtenons la relation :

$$L = \frac{\lambda}{2\pi h} \frac{\lambda}{2\pi \Delta x},$$

montrant que pour un opérateur de dissipation en dérivée seconde, la longueur d'amortissement — en unité de λ — croît linéairement avec le rapport $\lambda/\Delta x$; les modes de hautes fréquences sont effectivement correctement amortis, mais les grandes longueurs d'ondes le sont également beaucoup trop. C'est principalement pour cette raison que nous nous sommes détournés du schéma de Du Fort-Frankel.

Afin que le processus dissipatif sélectionne principalement les courtes longueurs d'ondes sans trop affecter les grandes structures, nous pouvons accroître son ordre de dérivation; si nous considérons un opérateur en dérivée quatrième plutôt qu'en dérivée seconde, un raisonnement analogue au précédent montre que le temps caractéristique d'amortissement devient, $\tau = \lambda^4/16\pi^4\kappa$, avec $\kappa = h\Delta x^3 c$, d'où l'on déduit :

$$L = \frac{\lambda}{2\pi h} \left[\frac{\lambda}{2\pi \Delta x} \right]^3.$$

Cette fois, grâce à l'élévation au cube, la longueur d'amortissement devient très grande pour les basses fréquences alors qu'elle reste sensiblement la même pour les modes tels que $\lambda \sim \Delta x$.

Finalement nous définissons l'opérateur des contraintes numériques :

$$Q = -\rho c h \Delta x \mathcal{C}(v) \frac{\partial v}{\partial x},$$

dont la divergence entre dans les équations du mouvement et où l'opérateur hyper-diffusif \mathcal{C} contient l'information sur la dérivée seconde de la vitesse. Nous remarquons que l'opérateur de capture de choc sélectionne certaines régions de l'espace alors que l'opérateur hyper-visqueux agit indifféremment sur l'ensemble du maillage mais choisit les modes à amortir.

En pratique, nous avons essayé d'appliquer la formulation en 3D de Brandenburg *et al.* (1995): ils définissent le tenseur de contrainte symétrique dû à la dissipation numérique

comme :

$$Q_{ij} = \rho \kappa_{ij} S_{ij} \quad \text{avec} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i).$$

Les coefficients de viscosité numérique sont définis par :

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\nu_i C_j(S_{ij}) + \nu_j C_i(S_{ij})).$$

La « viscosité » numérique ν , s'apparente à celle d'un processus de diffusion classique, mais comprend tout de même la prescription de Tscharnutter & Winkler (1979) :

$$\nu_i = \Delta x_i (h_1 V_F + h_2 |v|) + h_3 \Delta x_i^2 |\nabla \cdot \vec{v}|.$$

Cette expression prend en compte les principales vitesses de propagation de l'information : la vitesse magnétosonique rapide V_F et la vitesse du plasma lui-même. En outre, à chaque composante de la viscosité est associé un paramètre, h , de l'ordre de l'unité.

Il ne reste plus alors qu'à définir l'opérateur hyper-visqueux tel que :

$$C_i(g) = \frac{\max_{i \pm 1} |\Delta_i^2 g|}{\max_{i \pm 1} |g|}, \quad (2.29)$$

avec $\Delta_i^2 g = \Delta x_i^2 \partial^2 g / \partial x^2$. On prend les maxima des fonctions sur trois points grille consécutifs pour prévenir les risques d'annulation du dénominateur.

Définis de la sorte — c'est-à-dire en considérant un tenseur des contraintes symétrique — ces opérateurs ne dénaturent pas la physique du problème et conduisent à une dissipation définie positive : $\overline{Q} : \overline{\nabla v} = \rho \kappa^{ij} S_{ij}^2$.

2.6 Parallélisation

Les simulations numériques, tridimensionnelles, conduisant à produire une turbulence entretenue, telles que celles que nous souhaitons effectuer en étudiant le développement non linéaire de l'instabilité magnéto-rotationnelle, nécessitent d'importantes ressources informatiques. Il faut principalement considérer les besoins en calcul arithmétique (opérations à virgules flottantes), les besoins en mémoire vive, puis les capacités de stockage nécessaires à l'archivage des données de simulation. Il faut également évaluer les exigences du post-traitement qui peut parfois s'avérer très lourd.

Le point crucial portant sur les capacités de calcul impose d'avoir une idée du nombre d'opérations que le code exécute sur des réels à chaque pas de temps et de comparer cette estimation aux caractéristiques des machines supportant le programme ; leur efficacité de calcul se quantifie en mega, giga ou tera flops⁷. Ainsi, on détermine rapidement le type de simulations que l'on peut raisonnablement effectuer au vu de leurs limites en résolution (due à la capacité de mémoire vive et au temps de calcul) et en évolution dans le temps (due au

7. Acronyme de « Floating Point Operation Per Second ».

temps de calcul). Au delà des options particulières de compilation, il est bien entendu possible d'améliorer la rapidité du calcul en optimisant le code au niveau de l'algorithmique, de la décomposition en opérations élémentaires et de l'utilisation de la mémoire rapide (mémoire cache). Cependant, cette tâche, relativement fastidieuse, dépend complètement de la structure de chaque machine et nuit à la portabilité des codes ; il faut développer des sources appropriées aux différents environnements utilisés, c'est pourquoi, en général, nous nous en tenons aux optimisations de compilation préconisées par les constructeurs.

Dans le cas de simulations numériques lourdes il est intéressant de choisir une architecture de machine adaptée au type de simulation et à la structure des algorithmes implémentés ; dans les centres de calcul nationaux, nous trouvons en particulier des machines scalaires, vectorielles ou parallèles. Toutefois, il faut noter la forte spécificité de certaines machines dont les performances sont remarquables pour certaines formes de calcul mais s'effondrent dès que l'on s'en écarte.

Nous avons effectué une grande partie de nos développements sur la grappe de calculateurs scalaires IBM RS6000 du Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire des Sciences de l'Univers de Grenoble. Sur ces machines, dites « séries », les opérations sont exécutées séquentiellement, les unes à la suite des autres — les processeurs RISC ont toutefois une structure leur permettant d'effectuer certaines opérations élémentaires, de la forme $c = a \times b + c$, en seulement un ou deux cycles d'horloge, d'où leur nom de « superscalaire » — ce qui rend ces machines caduques pour des simulations sur de grandes échelles de temps.

Les machines vectorielles, beaucoup plus spécialisées que les précédentes, permettent d'accroître la rapidité des simulations. Le principe de ces calculateurs est de décomposer chaque opération à virgule flottante en sous opérations très rapides et se recouvrant ; cependant les codes doivent être vectorisables, c'est-à-dire qu'ils reposent sur une majorité d'opérations algébriques portant sur de grands tableaux de données — c'est le cas des schémas numériques aux différences finies.

Quant aux machines parallèles, leur particularité est de répartir les calculs différents sur processeurs indépendants, ou nœuds, puis de gérer le plus efficacement possible les communications entre ces nœuds.

Au cours de nos projets liés à la turbulence nous avons ressenti le besoin de porter notre code sur des super-calculateurs. Les machines parallèles répondaient bien à nos attentes, d'une part parce qu'à résolution équivalente, elles peuvent en théorie diviser les temps de calcul par le nombre de nœuds utilisés (en comparaison avec une machine monoprocesseur équivalente à un nœud). D'autre part, les capacités en mémoire vive de ces machines étant globalement plus importantes que sur une machine scalaire, nous pouvons accéder à des simulations plus résolues ou plus étendues.

Néanmoins, compte tenu de l'aspect « expérimental » de nos développements numériques, il était difficile de déposer une demande d'heures de calcul sur les machines des centres nationaux. Mais, nous avons pu bénéficier d'un accord entre la Région Rhône-Alpes et le Com-

missariat à l'Énergie Atomique pour obtenir des heures de calcul sur la machine massivement parallèle CRAY T3E⁸.

Le calcul parallèle nécessite bien sûr d'avoir une architecture de machine particulière mais également d'effectuer des développements logiciels appropriés. La distribution d'un même programme sur plusieurs processeurs peut se faire en scindant un algorithme en différentes parties indépendantes que l'on exécute sur chaque nœud (parallélisme par les instructions), ou alors, suivant l'approche que nous avons adoptée, par une décomposition de la grille de simulation en plusieurs sous-domaines (parallélisme par les données), chacun d'eux étant traité par un nœud. La qualité de la parallélisation se mesure ensuite à la manière dont s'effectuent les communications entre les processeurs. Leur rapidité dépend entre autres de la topologie physique de la machine (torique dans le cas présent) qui détermine les chemins que vont suivre les données transitant d'un nœud à un autre. Sur le plan logiciel il est bien entendu nécessaire de réguler ces communications ; en particulier il faut faire en sorte de recouvrir le temps des communications par des calculs afin qu'elles ne soient pas limitantes.

Sans entrer dans le détail de la programmation, précisons que nous avons utilisé la librairie MPI⁹ pour gérer les communications point-à-point (entre deux nœuds voisins) et les communications collectives (entre un nœud et tous les autres) de façon optimale, via des protocoles synchrones (synchronisation de l'émission et de la réception des données) et non bloquants (l'exécution du programme continue durant les échanges de données). Le choix de cette librairie parmi d'autres telles que Parallel-Virtual-Machine (qui tend à disparaître) est dû à ses atouts (sa fiabilité, ses performances, sa simplicité et sa tendance à s'établir comme la norme). Pour conclure sur cette partie technique, indiquons que notre code se prêtait très bien à cette expérience de parallélisation et qu'il nous a donné satisfaction ; il s'est en particulier montré linéaire, c'est-à-dire que le temps de calcul reste le même lorsque l'on augmente le nombre de nœuds suivant le nombre de points de grille, cela signifie que l'on n'est pas limité par les communications mais par le calcul.

2.7 Validité du programme

Le noyau de base du code que nous avons développé avait permis de simuler le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz dans deux couches de « discontinuité » rotationnelle. La bonne résolution spatiale de cette simulation, 2D, bi-périodique, était obtenue grâce à l'utilisation d'un grand nombre de points de grille (256×256). Néanmoins, nous n'avions pas réalisé l'absence de tension magnétique dans cette étude, et compte tenu de la qualité du développement non linéaire et de la définition correcte des structures développées, nous avons admis les diagnostics de simulation comme des tests probants d'une certaine qualité de l'algorithme élémentaire.

8. Machine composée de 288 nœuds DEC Alpha EV5, cadencés à 375 MHz d'une puissance crête de 750 Mflops, chaque nœud étant pourvu de 128 ou 512 Mo de mémoire.

9. Acronyme de « Message Passing Interface ».

Cependant, au cours de nos propres développements, en particulier durant nos tentatives de simuler l'instabilité magnéto-rotationnelle sur machine massivement parallèle, nous avons été confronté à d'incontournables problèmes d'instabilités numériques découlant de l'apparition d'oscillations à l'échelle du pas. Bien entendu, malgré la parallélisation du programme, nous ne pouvions atteindre en 3D la résolution 256×256 des simulations 2D mais nous cherchions tout de même à limiter la diffusion numérique afin d'obtenir des résolutions correctes pour ce type de problème. Nous nous sommes alors penchés avec plus d'acuité sur le point délicat de la dissipation numérique. Nous avons dans le même temps essayé de mieux caractériser le code en lui faisant subir différents tests caractéristiques des simulations hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques. Nous n'avons pas cherché à produire nos propres tests mais nous nous sommes plutôt appuyés sur la littérature portant sur le sujet ; nous avons regardé différents tests de propagation d'ondes et de tube de choc. Puis nous avons à nouveau simulé l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en introduisant cette fois un champ magnétique parallèle à l'écoulement cisailé.

2.7.1 Tests caractéristiques

Nous présentons dans cette section le comportement du code dans des configurations tests unidimensionnelles de tube de choc, en présence de champ magnétique ou non. Ces évaluations des limites du programme sont effectuées sur 256 points de grille et nous considérons différentes largeurs du choc initial ainsi que différentes viscosités numériques.

Tube de choc

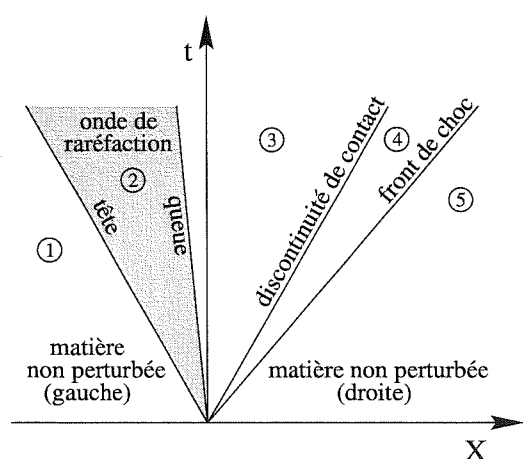


FIG. 2.12 – Propagation de l'information dans le test hydrodynamique de Riemann. L'espace se découpe en cinq régions ; les zones non perturbées de gauche et de droite sont séparées par une onde de raréfaction, une discontinuité de contact et un front de choc.

Nous présentons dans un premier temps le test hydrodynamique incontournable du tube de choc, relativement difficile mais très complet, appelé également « test de Riemann » ; il fut proposé pour la première fois comme évaluation d'algorithme numérique par Sod (1978), puis, par exemple, par Hawley *et al.* (1984) qui détaillent les solutions exactes du calcul (on peut consulter également Hirsch (1997b)) et en donnent, en outre, une version relativiste. En

comparant les résultats de simulation aux solutions exactes du problème¹⁰, le tube de choc nous permet d'évaluer la qualité du schéma aux différences finies (termes sources et termes de transport) quant à la propagation d'une onde non linéaire et la conservation des quantités physiques qui doivent l'être.

Le problème de Riemann met en relation, à l'instant $t = 0$, deux états discontinus de la matière, notés (1) et (5) sur la figure 2.12, à gauche un fluide dense et chaud, à droite un fluide ténu et froid, puis laisse évoluer le système. Comme le montre la figure 2.12, l'interaction des deux phases — celle de gauche pousse celle de droite — conduit à la propagation de deux ondes non linéaires : une onde de raréfaction dans la partie gauche et un front de choc dans la partie droite. Derrière l'onde de choc suit la matière post-choquée en mouvement, chaude et ténue, qu'une discontinuité de contact sépare d'une phase plus dense ; puis vient finalement la matière détendue.

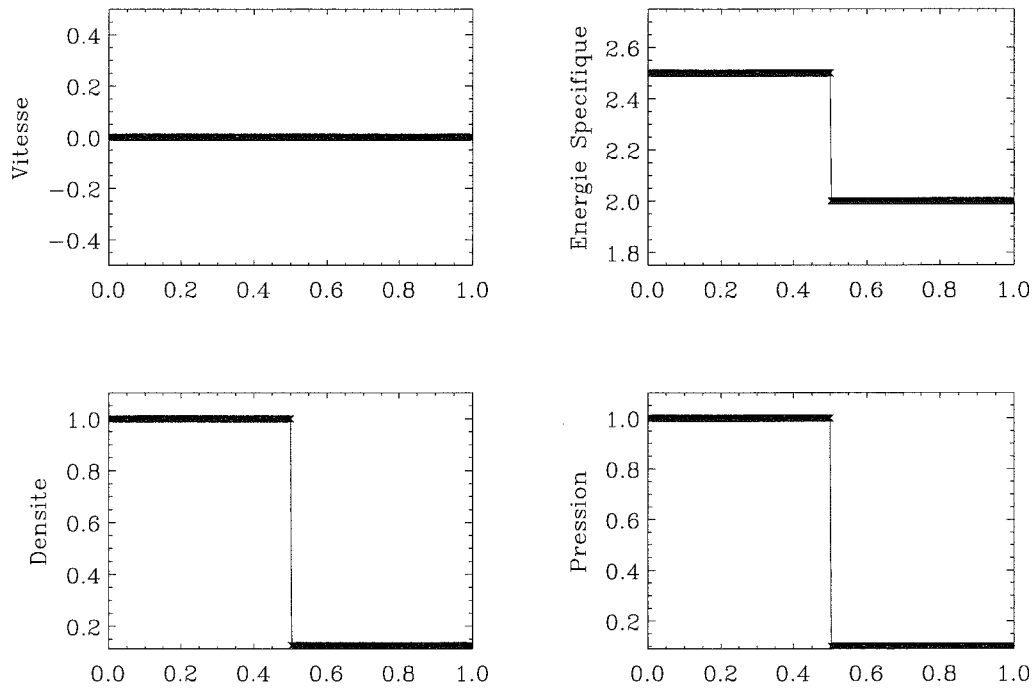


FIG. 2.13 – Conditions initiales du test de Riemann.

Les conditions initiales du test doivent évidemment vérifier les relations de franchissement de sauts ; à l'instar de Sod (1978) nous considérons les conditions initiales représentées sur la figure 2.13 où la discontinuité est centrée en $x = 0.5$; pour un fluide immobile et un indice polytropique $\gamma = 1.4$, dans la partie gauche, densité et pression valent respectivement $\rho_1 = 1$ et $P_1 = 1$, tandis que dans la partie droite elles sont de $\rho_5 = 0.125$ et $P_5 = 0.1$. Dans un premier temps nous avons considéré une discontinuité infiniment mince — condition qui permet un calcul exact. Sans aucune forme de dissipation numérique, on peut s'attendre à

¹⁰. Les solutions exactes, similaires (i.e. en x/t) s'obtiennent à partir des courbes caractéristiques des ondes non linéaires présentes et des conditions de franchissement des discontinuités.

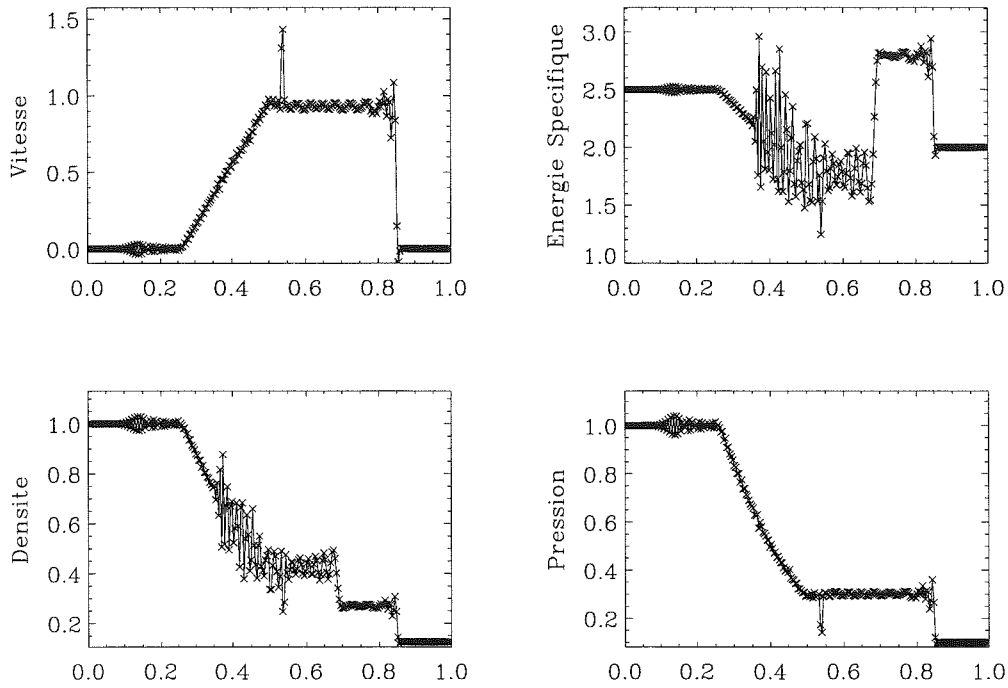


FIG. 2.14 – Test de Riemann, à $t = 0.2$, pour une discontinuité infiniment mince, sans terme de dissipation numérique.

voir apparaître d'importantes oscillations à l'échelle du pas ; cela se vérifie effectivement sur la figure 2.14 qui, comme tous les diagnostics de ce test, montre les profils de vitesse, d'énergie spécifique, de densité puis de pression. D'une part, compte tenu de la propagation du front de choc mal résolu (sur deux points de grille), nous constatons des perturbations dans la région post-choc ; d'autre part, en aval de la discontinuité de contact, de fortes oscillations sont produites dès le début de la simulation à cause des profils initiaux infiniment étroits. Bien qu'elles soient nombreuses et de fortes amplitudes, les oscillations à l'échelle du pas ne semblent pas instables sur ces échelles de temps.

Nous avons alors implémenté, dans l'algorithme, un terme de dissipation numérique. Plutôt que d'introduire une diffusion constante sur toutes les équations, nous avons préféré appliquer à l'équation du mouvement l'algorithme de capture de choc donné par la relation (2.24). Comme on peut le voir sur la figure 2.15, avec une échelle caractéristique de diffusion d'une dizaine de points, on élargit partiellement le front de choc, en revanche, on supprime les oscillations post-choc à l'échelle du pas. Néanmoins, celles présentes à gauche de la discontinuité de contact persistent car leur origine est ailleurs — elle réside dans la discontinuité infiniment étroite des profils initiaux.

Les travaux de Tscharnutter & Winkler (1979) préviennent la formation des chocs en prenant un coefficient de diffusion numérique proportionnel au taux de compression, i.e. à $\nabla \cdot \vec{u}$ lorsque la divergence est négative. Nous avons réussi à atténuer ces perturbations numériques en considérant également une dissipation non nulle dans la zone de détente (on

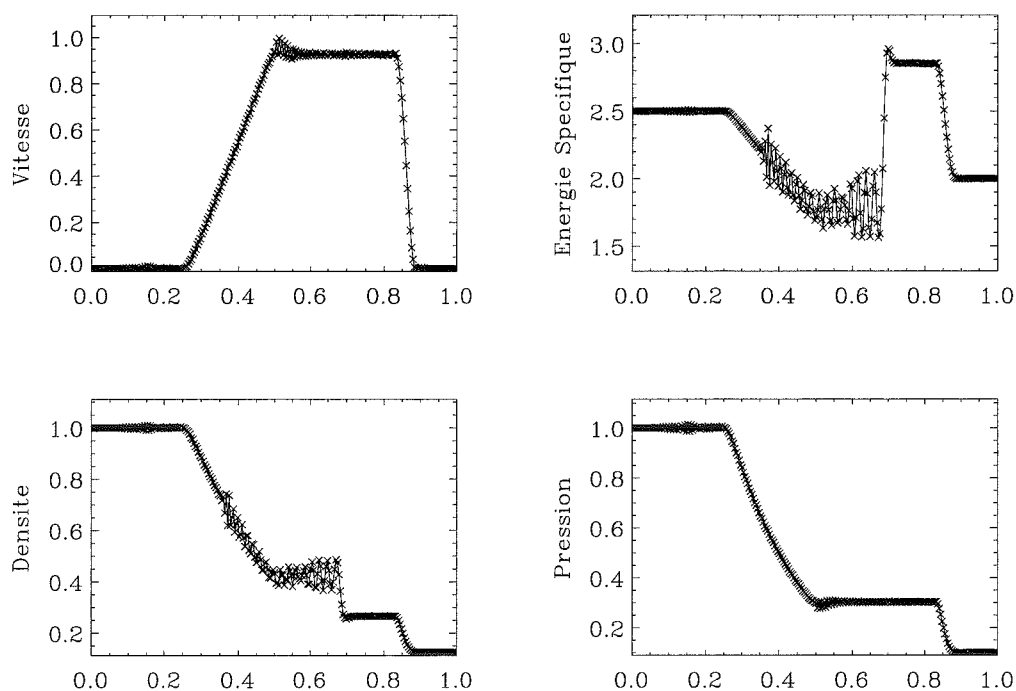


FIG. 2.15 – Test de Riemann, à $t = 0.2$, pour une discontinuité infiniment mince, avec une dissipation numérique sur dix points de grille.

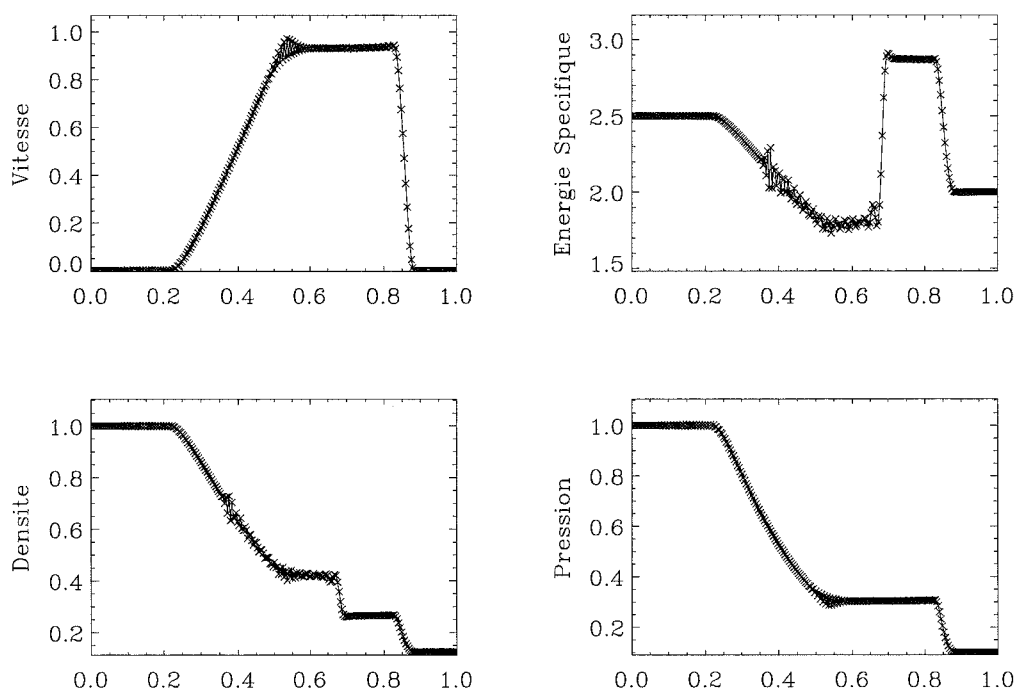


FIG. 2.16 – Test de Riemann, à $t = 0.2$. Le schéma dissipatif agit dans les zones de formation de choc mais également dans les régions de détente.

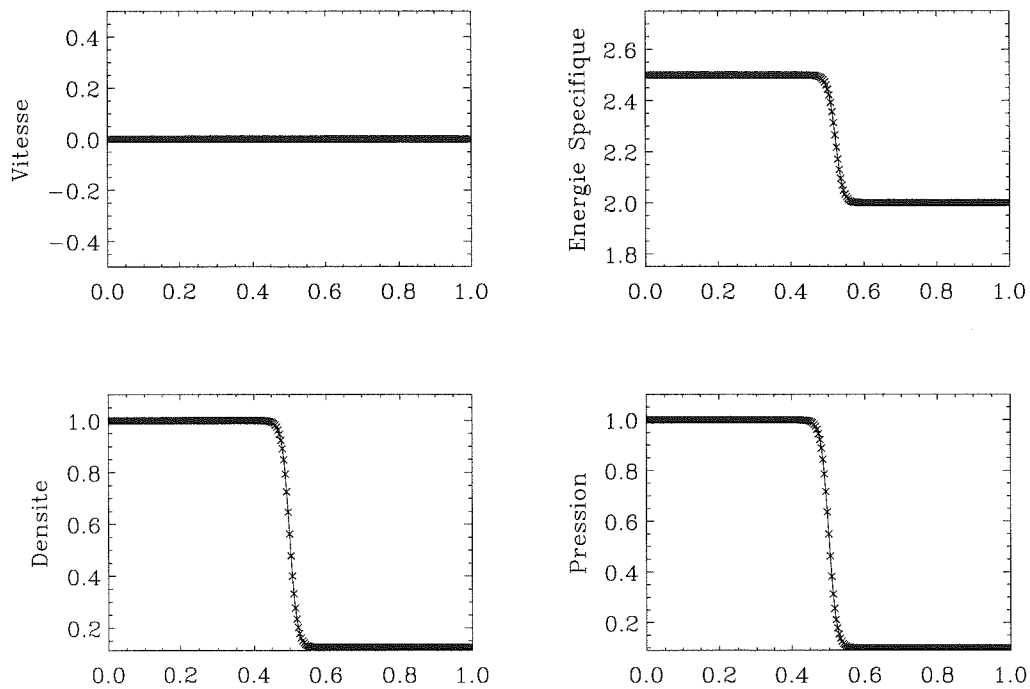


FIG. 2.17 – Conditions initiales du test de Riemann avec des profils initiaux élargis sur quinze points de grille.

considère maintenant la valeur absolue de la divergence de la vitesse, quel que soit son signe).

Pour éliminer complètement les oscillations centrales nous avons élargi les profils de pression et de densité initiaux du test de Riemann sur une quinzaine de points, comme le montre la figure 2.17 — en pratique, nous avons décrit les conditions initiales par des « tanh ». La solution exacte de ce problème — de toute évidence insoluble par ce code — n'est plus celle donnée par Hawley *et al.* (1984), mais en reste toutefois très proche. La figure 2.18, obtenue par une simulation sans dissipation numérique, montre qu'ainsi nous résolvons les problèmes des perturbations se développant à l'échelle du pas, dès les premiers instants du test, au niveau de la discontinuité — initialement, dans cette région, compte tenu de la propagation du choc vers la droite et de l'onde de raréfaction vers la gauche, les profils des grandeurs physiques sont très « accidentés ». Cependant, sans dissipation numérique, nous récupérons des oscillations dans la région post-choc — malgré la largeur initiale des discontinuités — à cause du raidissement non linéaire du front de choc.

Finalement, afin de traiter le plus convenablement possible le problème du tube de choc, nous incluons dans le code de la dissipation numérique (algorithme de capture de choc) sur six points de grille. Comme le présente la figure 2.19, les profils de vitesse, de pression, de densité et d'énergie spécifique sont corrects, ont les caractéristiques et les valeurs attendues, mais montrent des courbes largement adoucies par comparaison aux solutions exactes du test. Malgré une description satisfaisante de la physique non linéaire, ces tests laissent présager de graves difficultés à montrer des structures résolues spatialement.

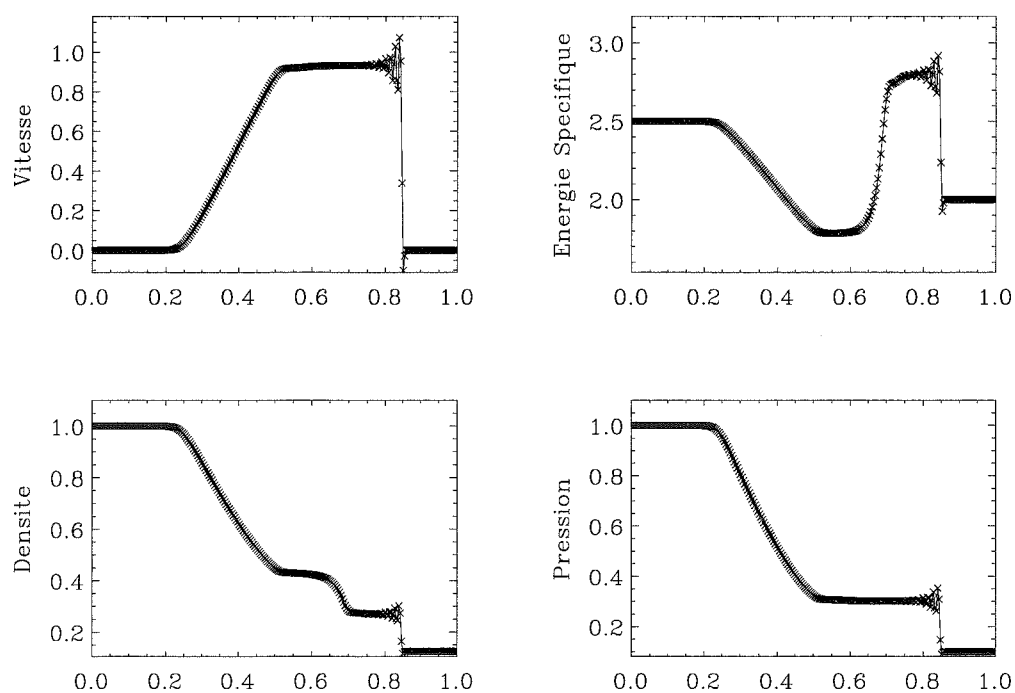


FIG. 2.18 – Test de Riemann, à $t = 0.2$, pour une discontinuité sur quinze points de grille, sans terme de dissipation numérique.

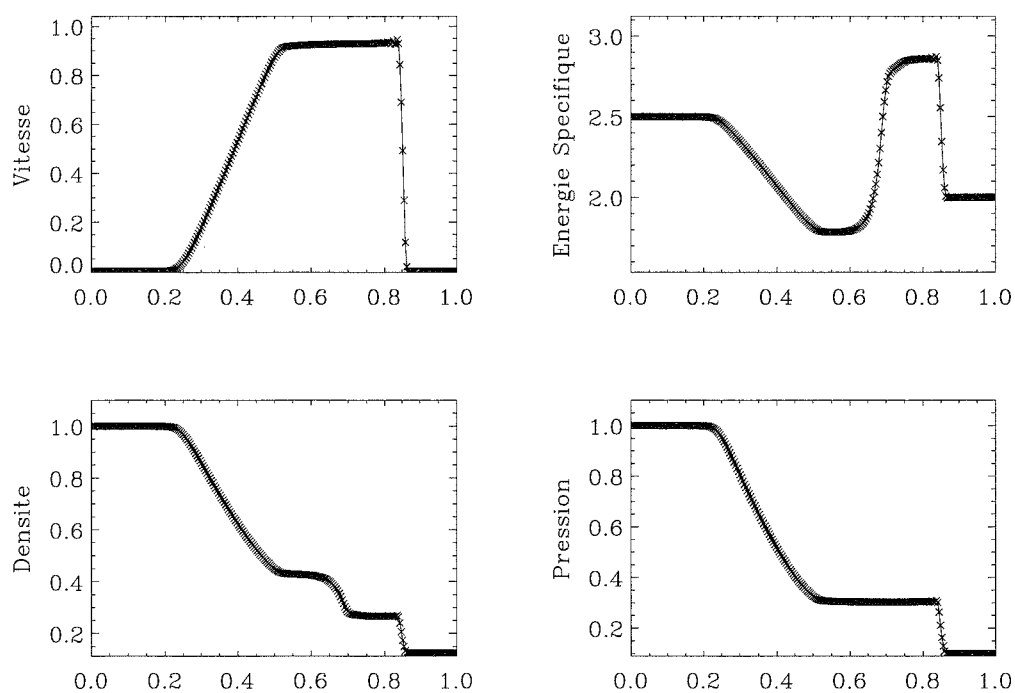


FIG. 2.19 – Test de Riemann, à $t = 0.2$, pour une discontinuité sur quinze points de grille et de la dissipation numérique sur six points de grille.

Tube de choc MHD

En y incluant le champ magnétique, nous allons à présent augmenter la complexité des tests du code, afin de le caractériser de façon plus exhaustive. Brio & Wu (1988) ont proposé un test de tube de choc MHD, analogue au problème de Riemann — *i.e.* testant les mêmes points des algorithmes — mais en présence de champ magnétique; ce test est repris, avec de nombreux autres, par Stone *et al.* (1992).

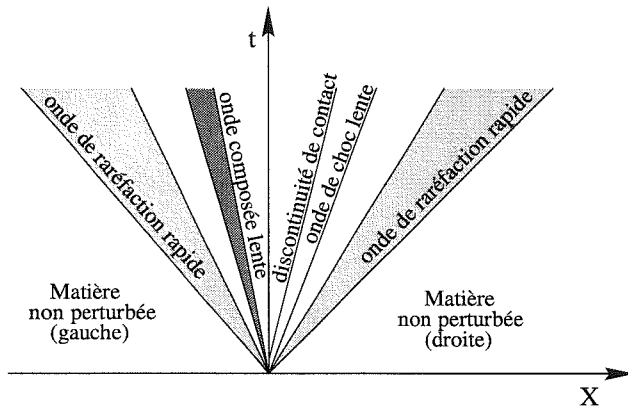


FIG. 2.20 – Propagation de l'information dans le test MHD de Riemann. L'espace se découpe en plusieurs régions; les zones non perturbées de gauche et de droite sont séparées par une onde de raréfaction rapide, une onde composée lente, une discontinuité de contact, un front de choc lent puis une autre onde de raréfaction rapide.

À la différence de sa contre-partie hydrodynamique, le problème de Riemann MHD ne possède pas de solution analytique; comme l'ont discuté Brio & Wu (1988) à travers leurs travaux numériques, un des points durs de la résolution analytique des équations MHD provient de leur non convexité. Cela signifie, entre autres, que différents types d'ondes MHD d'une même famille peuvent avoir la même célérité; les flots MHD peuvent alors engendrer des ondes « composées », formées d'une onde de raréfaction et d'un front de choc — par exemple, une onde de raréfaction magnétosonique lente et une onde de choc également magnétosonique lente pourront se propager à la même vitesse et s'associer pour former une onde composée. Cela marque une différence importante entre la nature des équations d'Euler et celle des équations de la MHD idéale et donc entre les ondes sonores et les ondes magnétosonores.

Bien qu'il ne possède pas de solution mathématique connue, le test de Riemann MHD permet d'évaluer, par comparaison avec les résultats d'autres programmes, la capacité d'un code MHD à propager des ondes de chocs, des ondes de raréfaction et des ondes composées. Initialement, deux régions de l'espace sont séparées par des discontinuités en pression, densité et champ magnétique. La figure 2.20 présente les différentes formes de propagation d'information dans le tube; lorsqu'on laisse le système évoluer, entre les plasmas non perturbés de gauche et de droite, il apparaît successivement, une onde de raréfaction magnétosonique rapide, une onde composée magnétosonique lente, une discontinuité de contact, un front de choc magnétosonique lent, puis, à nouveau une onde de raréfaction magnétosonique rapide.

Nous effectuons le test de choc dans la direction z , en plaçant les discontinuités au centre du tube ($z = 0.5$). Suivant Brio & Wu (1988), dans un milieu initialement immobile et avec un indice polytropique $\gamma = 2$, nous avons pris pour les grandeurs physiques de gauche, $P = 1$,

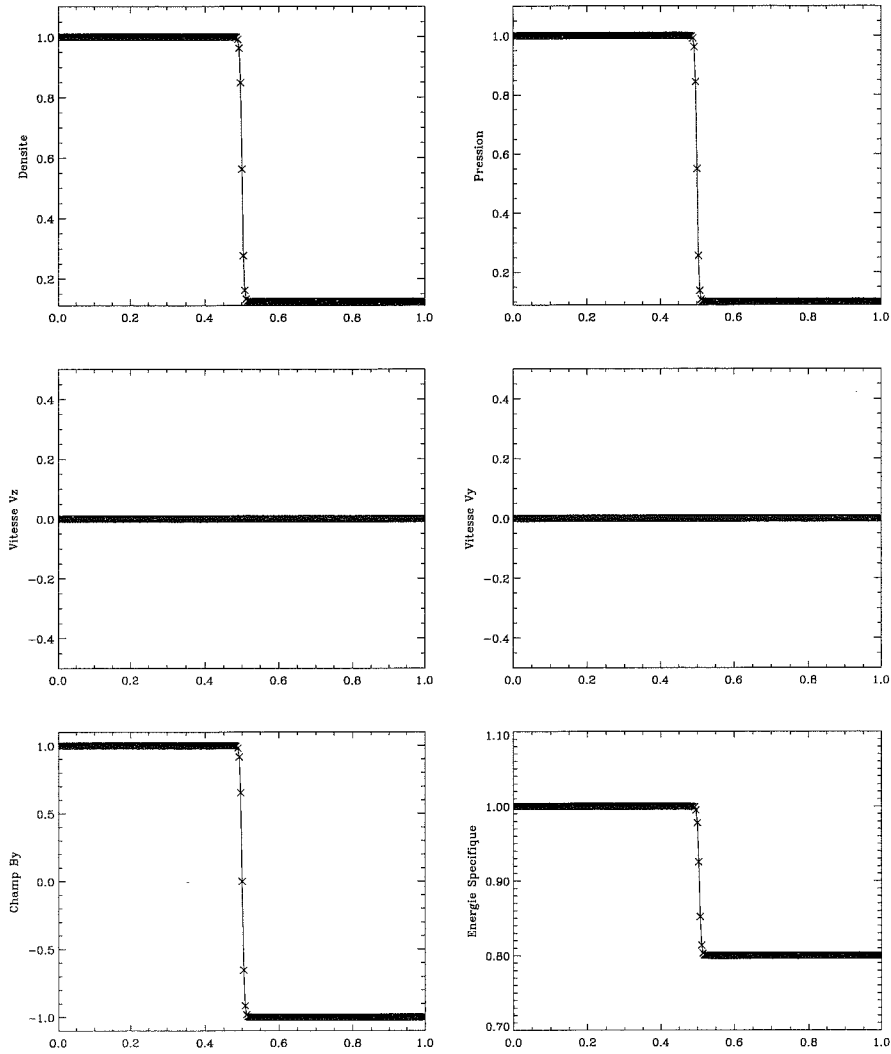


FIG. 2.21 – Conditions initiales du test de Riemann MHD, pour une discontinuité sur cinq points de grille.

$\rho = 1$, $B_z = 0.75$ et $B_y = 1$ tandis qu'à droite nous avons, $P = 0.1$, $\rho = 0.125$, $B_z = 0.75$ puis $B_y = -1$; ainsi, le champ magnétique initial fait un angle d'environ $\pm 53^\circ$ avec la normale à la discontinuité.

Le code ne permet pas d'effectuer le test avec, à l'instant $t = 0$, des discontinuités infiniment étroites ; nous avons systématiquement été obligé d'élargir les profils en utilisant les fonctions « tanh ». La figure 2.21 montre le type de conditions initiales en densité, pression, vitesse, champ magnétique et énergie spécifique — les différents diagnostics montrent également ces quantités — que nous avons considéré, avec dans le cas présent des sauts sur cinq points de grille. Sur l'ensemble des tests, B_z reste strictement constant ce qui traduit la conservation numérique exacte du flux magnétique, nous ne l'avons donc pas représenté. Durant les tests, nous avons toujours introduit de la dissipation numérique sur environ six points de grille afin de prévenir un raidissement non linéaire trop important au niveau du

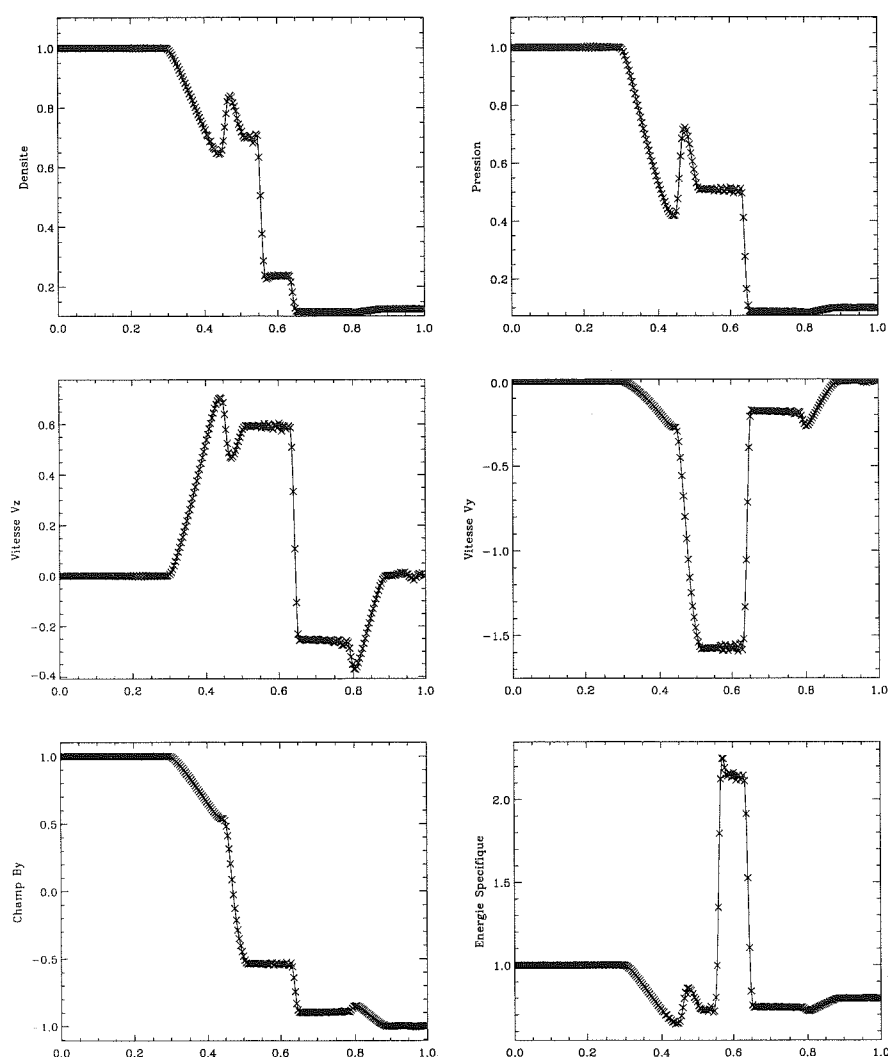


FIG. 2.22 – Test de Riemann MHD, à $t = 0.1$, pour une discontinuité sur cinq points de grille et avec de la dissipation numérique sur six points de grille.

choc lent.

La figure 2.22 montre le résultat du test au temps $t = 0.1$, les différentes ondes attendues sont effectivement présentes sur la grille ; par comparaison avec Brio & Wu (1988), Stone *et al.* (1992) ou Stone & Norman (1992b), nous retrouvons la phénoménologie du test et des valeurs cohérentes pour les différents plateaux. En revanche, étant donné que nous ne résolvons pas, a priori, le même problème que ces auteurs (à cause de la largeur des sauts) nous constatons des différences dans la structure de l'onde composée, plus large ici, et dans la forme de la jonction entre le plasma pré-choc et l'onde de raréfaction de droite, plus creusée dans nos tests.

Nous constatons également de légères oscillations à l'échelle du pas entre l'onde composée et la discontinuité de contact. Comme dans le cas hydrodynamique, ces perturbations sont liées à la raideur initiale des discontinuités : plutôt que de démarrer avec des sauts sur cinq

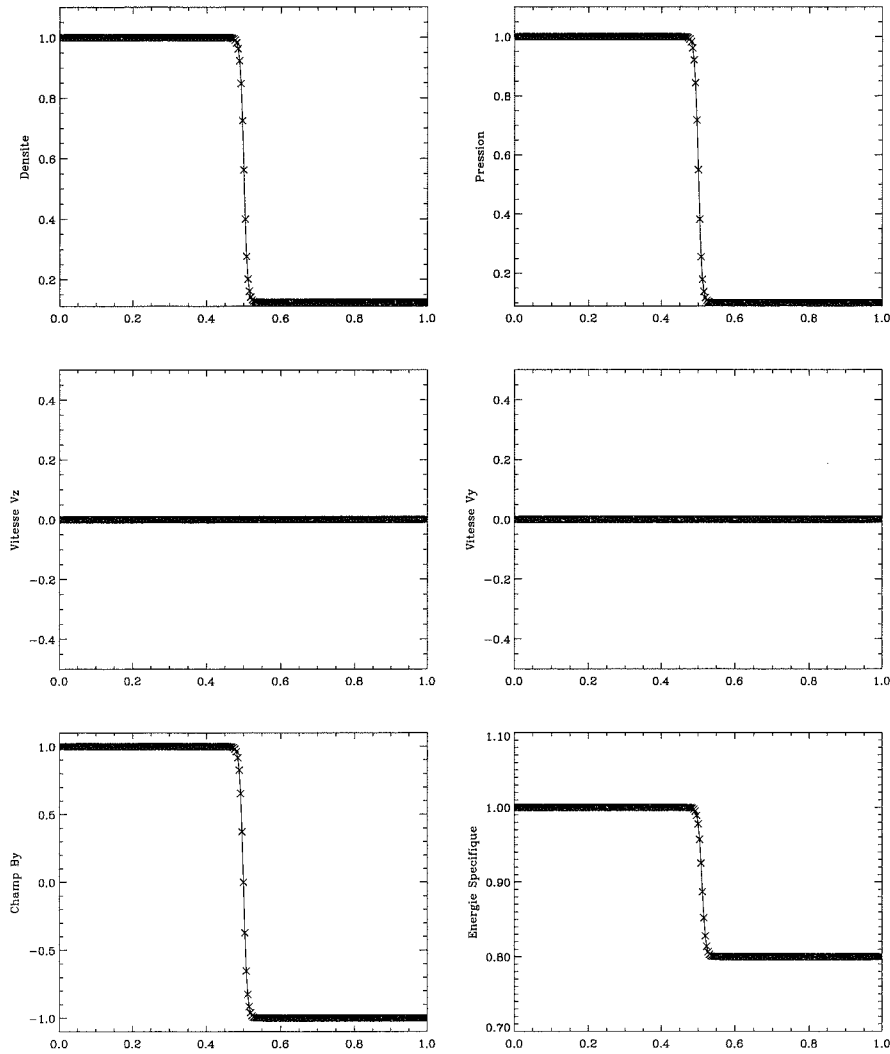


FIG. 2.23 – Conditions initiales du test de Riemann MHD, pour une discontinuité élargie sur dix points de grille.

points de grille, si nous en prenons le double (conditions initiales représentées sur la figure 2.23) comme nous pouvons le voir sur la figure 2.24, les oscillations à l'échelle du pas sont supprimées. Cependant, il est alors évident que la structure de l'onde composée s'est encore élargie ; on s'éloigne du problème posé à l'origine par Brio & Wu (1988).

De façon générale les tests de tube de choc hydrodynamique et MHD nous ont permis de vérifier la qualité de l'information que peut nous apporter le code ainsi que ses limitations. Le premier point s'avère concluant car nous retrouvons qualitativement et quantitativement ce à quoi nous nous attendions ; en revanche, ces tests n'ont pu se faire qu'au prix d'un calcul précis (256 points de grille dans l'intervalle $[0, 1]$) et en incluant une dissipation numérique relativement importante afin de ne pas être limité par les raidissements non linéaires dus aux chocs. Ces tests valident toutefois l'utilisation de la forme de dissipation numérique proposée

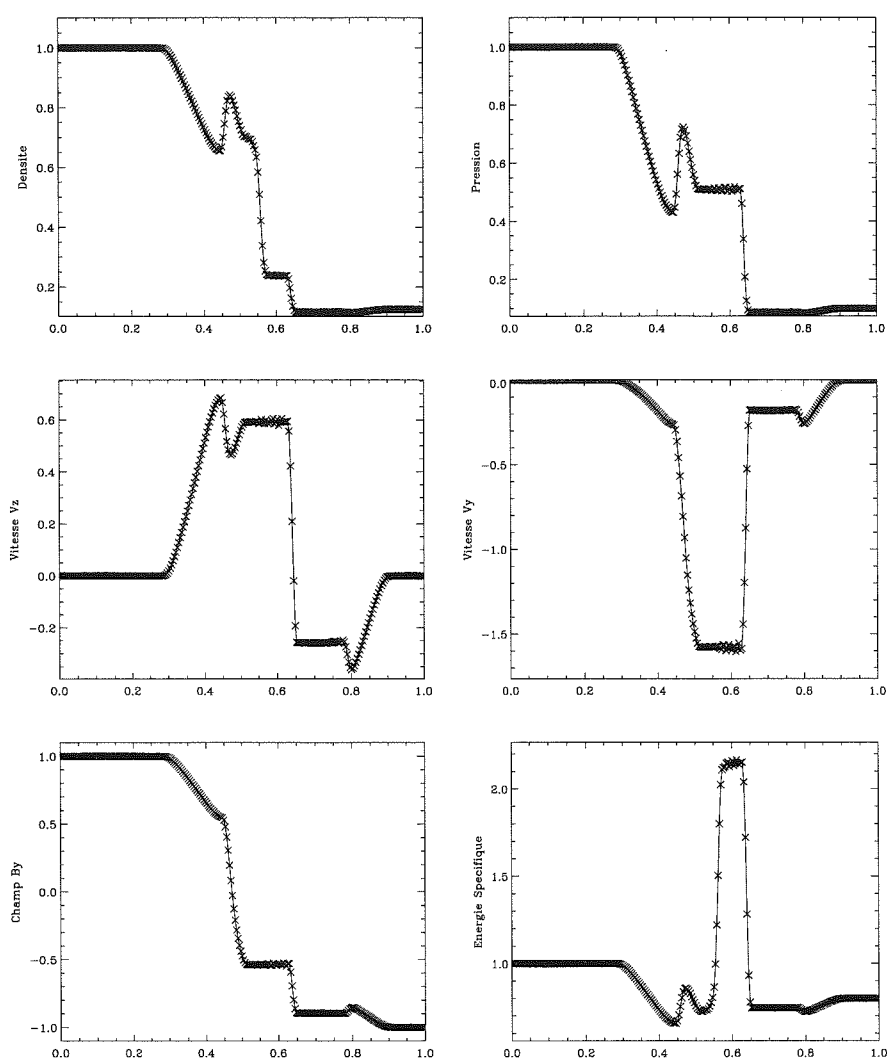


FIG. 2.24 – Test de Riemann MHD, à $t = 0.1$, pour une discontinuité sur dix points de grille et avec de la dissipation numérique sur six points de grille.

par Tscharnuter & Winkler (1979) ; en revanche, nous n'avons pas testé dans les algorithmes l'effet d'un terme hyper-visqueux sur l'atténuation des oscillations à l'échelle du pas. Pour terminer, il est important de noter que nous n'avons pu résoudre les véritables tests de Riemann mais seulement des problèmes approchés, en élargissant spatialement les sauts.

2.7.2 Simulation d'instabilités

À la suite des tests de Riemann hydrodynamique et MHD que nous avons effectués, nous avons également souhaité évaluer les capacités du code à développer des instabilités physiques. Devant les difficultés rencontrées dans les simulations de l'instabilité magnéto-rotationnelle, nous nous sommes rabattus sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz — déjà largement étudiée en hydrodynamique ; nous pensions ainsi pouvoir extraire facilement de l'information sur les problèmes numériques du code.

L'instabilité de Kelvin-Helmoltz se développe à l'interface entre deux fluides possédant des vitesses différentes ; son référentiel naturel est celui, où, de part et d'autre de la discontinuité, les vitesses sont égales mais de sens opposés — alors, les modes instables croissent mais ne se propagent pas. Nous nous placerons systématiquement dans ce référentiel.

Nous avons effectué des simulations bidimensionnelles ainsi que des simulations tridimensionnelles mais nous ne présentons que les premières ; elles suffisent à donner un aperçu des inconvénients du programme. Nos études ont lieu dans un plan (x, z) où la vitesse initialement cisailée est de la forme $v_x(z)$. Le cas d'une discontinuité de largeur nulle possède une solution analytique linéaire, mais il est évident, au vu des tests de tubes de choc, qu'il est impossible de démarrer une simulation à partir d'une telle condition initiale. Nous avons donc élargi la région de transition entre les milieux de vitesses différentes par des profils en $\tanh(z/a)$, où $d = 2a$ fixe qualitativement la largeur de l'interface. Chandrasekhar (1961) donne le taux de croissance analytique (i.e. pour une discontinuité franche) de l'instabilité pour un mode k dans un milieu de densité homogène, incompressible et en présence de champ magnétique :

$$\Gamma = \frac{1}{2} |\vec{k} \cdot \vec{V}_o| \left[1 - \left(2 \mathbb{V} \frac{\vec{k} \cdot \vec{e}_{\parallel}}{\vec{k} \cdot \vec{V}_o} \right)^2 \right]^{1/2} ; \quad (2.30)$$

\vec{e}_{\parallel} est la direction du champ magnétique — obligatoirement dans la couche de cisaillement pour permettre un équilibre — et \vec{V}_o est la vitesse relative d'une couche par rapport à l'autre. Cette relation donne trivialement une condition nécessaire d'instabilité sur le nombre de Mach alfvénique lorsque \vec{k} , \vec{e}_{\parallel} et \vec{V}_o sont alignés : $M_a = V_o/\mathbb{V} > 2$. Ce cas de figure est bien entendu celui où le champ magnétique joue son rôle le plus défavorable ; en effet l'action stabilisante de la tension magnétique est ici maximale. En revanche, lorsque le champ magnétique est perpendiculaire au vecteur d'onde, il ne modifie pas le critère de stabilité obtenu en hydrodynamique : il contribue seulement à modifier la vitesse de propagation de l'information par des effets de pression magnétique.

Les cisaillements de vitesse de largeur finie sont logiquement moins instables que les discontinuités abruptes ; leur taux de croissance Γ , plus faible que celui donné par (2.30), est maximal pour les modes dont le nombre d'onde est de l'ordre de l'inverse de la largeur du cisaillement. $k \sim 1/d \Rightarrow \lambda \sim 4\pi a$ — dans le cas analytique, les longueurs d'ondes les plus petites sont les plus instables.

Dans tous les tests, nous avons considéré des profils de vitesse initiaux donnés par :

$$v_x(z) = \frac{V_o}{2} \tanh \left[\frac{z - L_z/2}{a} \right].$$

En outre, lorsque nous introduisons des variations dans les différentes grandeurs physiques du problème, nous le faisons toujours par des fonctions de cette forme. Afin d'assurer un état d'équilibre initial, nous nous donnons le champ magnétique puis le rapport des énergies thermique et magnétique, $\beta = P_o/2B_o^2$; nous en déduisons la pression totale du plasma, homogène sur l'ensemble de la grille, et enfin sa pression thermique. Pour déstabiliser le flot,

nous déplaçons légèrement la paroi de transition entre les deux milieux (tout en conservant les lignes de courant de matière parallèles à l'interface).

Pour terminer sur les généralités des tests, nous n'avons introduit qu'une seule longueur d'onde dans la boîte de simulation, les graphiques qui en présentent deux ont été modifiés pour une meilleure lisibilité. Pour ce qui est des caractéristiques des grilles, nous avons toujours périodisé la boîte dans la direction x — on fixe ainsi la longueur d'onde du mode instable — tandis que dans la direction transverse nous avons généralement anti-symétrisé les conditions aux limites, en éloignant toutefois suffisamment les frontières pour contenir l'instabilité évanescence en z ($L_z = 2 - 4L_x$; Miura (1984) préconise $L_z \geq 20d$) et éviter les effets de bords. De plus, dans les simulations 2D nous avons constamment gardé à l'esprit notre désir de travailler en 3D; pour cette raison nous avons délibérément limité le nombre des points de grille.

Dans un premier temps, nous avons procédé au test du code avec un champ magnétique perpendiculaire au plan d'instabilité; comme nous l'avons déjà mentionné, ce test est quasi-hydrodynamique. Les conditions initiales de la simulation figurent dans le tableau 2.1.

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
32	16	128	32	1	1.2	1	1	0	1

TAB. 2.1 – Conditions initiales de la simulation à champ magnétique perpendiculaire.

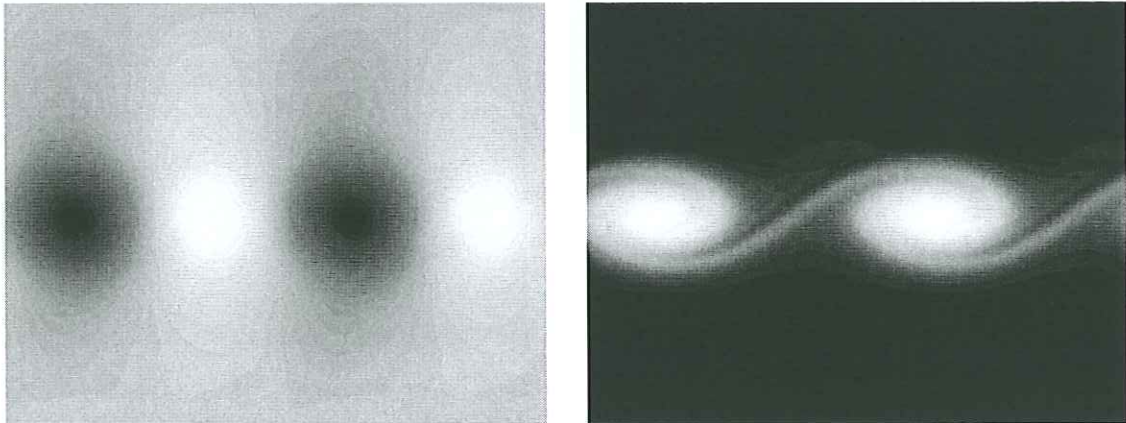


FIG. 2.25 – Cartes de densité et de vorticité obtenues, au temps $t = 50$, durant le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en champ magnétique perpendiculaire.

Sur la figure 2.25 nous montrons la vorticité du plasma lorsque le régime non linéaire de l'instabilité est établi, ainsi que sa densité. Nous constatons sans surprise la formation de vortex; malgré le caractère peu compressible de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, il apparaît logiquement une légère surpression entre les vortex et une dépression en leur cœur. Quelle que soit la résolution choisie, ces simulations conduisent inmanquablement au développement d'instabilités numériques lorsque naissent des structures fines dans le profil de $v_x(z)$. Ces gradients importants ne sont pas correctement dissipés par les méthodes de capture de choc,

compte tenu de la faible compression ; pour augmenter la durée des simulations il faut introduire, sur les différentes grandeurs physiques, une dissipation plus élémentaire qui conduit à lisser toutes les structures et donc à diminuer la résolution spatiale.

Nous avons par ailleurs simulé le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, toujours en champ magnétique perpendiculaire, mais en introduisant cette fois un saut en densité, la matière la plus dense étant la moins rapide ; les conditions initiales sont décrites dans le tableau 2.2. Afin de voir la matière s'enrouler au niveau de l'interface, nous sommes nécessairement conduits à diffuser artificiellement la densité sur plusieurs points de grille — pour cela, soit nous résolvons un laplacien par l'algorithme de Du Fort-Frankel, soit nous considérons un flux artificiel de masse en $-\nu_\rho \partial \rho / \partial x_i$, mais la condition CFL en Δx^2 devient alors drastique.

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
32	16	512	64	1	1.2	$1 \rightarrow 2$	1	0	1

TAB. 2.2 – Conditions initiales de la simulation à champ magnétique perpendiculaire, pour deux milieux de densités différentes.

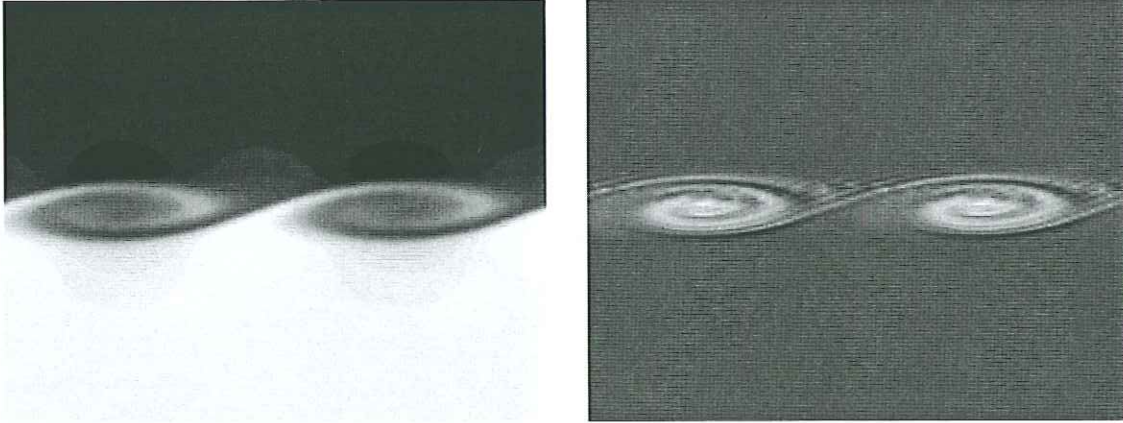


FIG. 2.26 – Cartes de densité et de vortacité obtenues, au temps $t = 100$, durant le développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en champ magnétique perpendiculaire, entre deux fluides de densités différentes.

Pour obtenir les cartes de densité et de vortacité de la figure 2.26, avec une perturbation initiale plus faible que précédemment, nous avons laissé le processus instable se développer durant $t = 100$ unités de temps (données par la vitesse d'Alfvén et a). Nous voyons que les structures fines de la vortacité conduisent à des oscillations à l'échelle du pas que seule une dissipation numérique plus importante arrive à éliminer.

Les étapes suivantes ont naturellement eu pour objectif de regarder comment le code traite les influences réciproques du champ magnétique et de la dynamique de l'instabilité. Pour être

en mesure d'effectuer ces tests, nous avons dû systématiquement accroître la résolution de la grille. Cependant, nous n'avons pu faire de test en champ magnétique « fort », i.e. pour $\beta \sim 10$, mais nous avons dû nous contenter de $50 < \beta < 100$.

Le premier type de simulation considère initialement un champ magnétique homogène dans la direction de l'écoulement. Comme l'indique la relation (2.30), le flot doit alors être super alfvénique ; il faut toutefois limiter l'écart de vitesse entre les deux fluides à des valeurs proches de la vitesse d'Alfvén sous peine de voir les vortex eux-même détruits par le cisaillement. Nous présentons sur les figures 2.27 et 2.28 les diagnostics d'une simulation, obtenus pour les conditions initiales figurant dans le tableau 2.3, à différents instants de l'évolution de l'instabilité. Les lignes de courant de matière de la figure 2.27, qui montrent l'apparition

n_x	L_x	n_z	L_z	a	V_o	ρ_o	B_{oy}	B_{oz}	β
64	16	256	32	1	1.2	1	0	0.1	100

TAB. 2.3 – Conditions initiales de la simulation en champ magnétique parallèle.

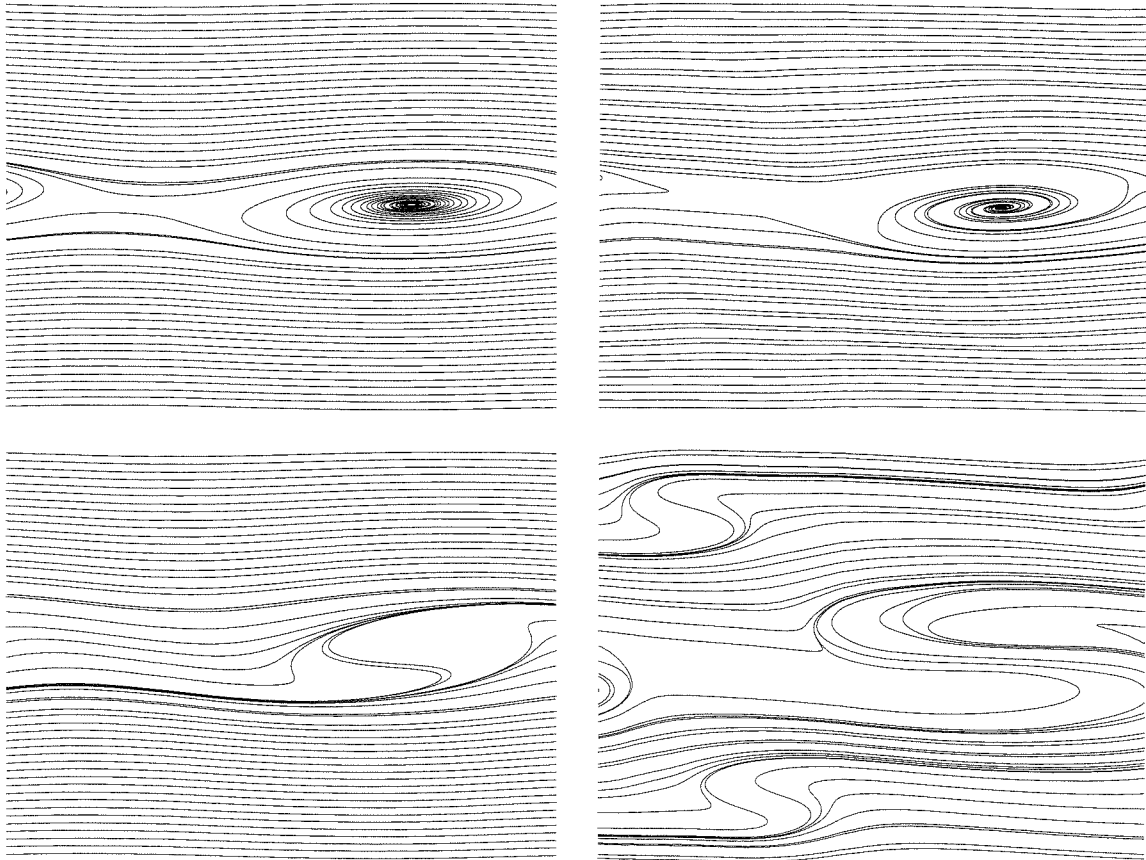


FIG. 2.27 – Représentation des lignes de courant de matière aux instants $t = 80$ et 240 , puis des lignes de champ magnétique aux mêmes instants, au cours du développement de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en champ magnétique parallèle.

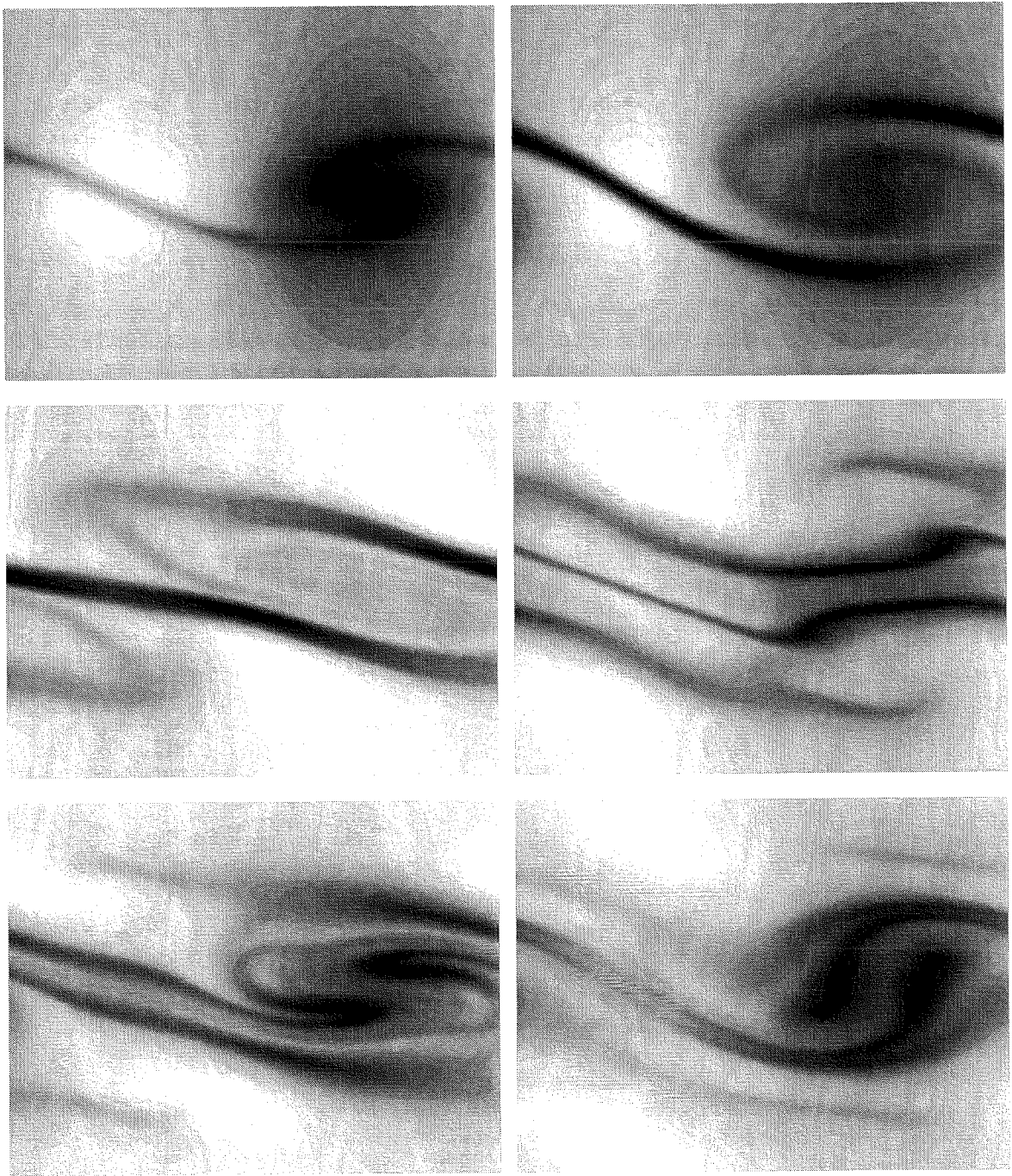


FIG. 2.28 – Cartes de densité, obtenues durant le développement non linéaire de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en présence d'un champ magnétique parallèle, aux instants $t = 80, 120, 160, 200, 240$ et 280 .

d'un vortex, ne sont sensiblement affectées qu'au niveau de l'interface, tandis que les lignes de champ magnétique, transportées par le plasma, ont été largement modifiées de part et d'autre de la zone de transition ; l'advection du champ magnétique donne lieu à des processus de reconnection qui le déstructurent complètement (les graphes sont tronqués transversalement

pour se concentrer sur l'interface). La figure 2.28 montre des cartes de densité à différents moments de l'évolution de l'instabilité. Bien que jouant un rôle minime sur la dynamique du flot, de part son couplage avec le plasma nous pouvons constater que le champ magnétique change de façon importante le déroulement du processus instable dans la phase non linéaire. Les résultats des simulation que nous présentons ici sont cohérents avec ceux obtenus par Frank *et al.* (1996) dans des études similaires.

Sur le plan numérique, le traitement du champ nous conduit à accroître encore la dissipation artificielle pour ne pas voir rapidement apparaître des instabilités numériques liées à la formation de couches de courant ou de vorticité. Nous avons en particulier implémenté un algorithme de dissipation hyper-visqueuse qui améliore la longévité des simulations mais n'évite pas, toutefois, le développement d'oscillations à l'échelle du pas, lorsque les gradients deviennent en certains endroits incompatibles avec les caractéristiques du code.

Nous avons dans certains cas conduit les simulations jusqu'à obtenir un nouvel état stationnaire laminaire, mais ce ne fut que par l'adjonction d'une dissipation numérique, dynamiquement significative, participant à l'élargissement de la zone de transition de vitesse.

2.7.3 Conclusion sur les études numériques

Notre première expérience de la MHD numérique est globalement très enrichissante et positive. Bien que nous n'ayons pu forger un programme de simulation numérique susceptible de répondre aux questions que nous nous posons sur le développement de la turbulence dans les disques d'accrétion magnétisés — en pratique, ce type d'étude nécessite des algorithmes extrêmement performants — nous avons tout de même acquis une expérience certaine dans le domaine de la MHD numérique. Le fait de travailler sur un algorithme élémentaire nous a permis de mettre en avant, les uns à la suite des autres, différents point délicats de cette discipline complexe.

  travers la bibliographie, nous avons beaucoup appris sur les méthodes numériques de façon générale — leurs méthodes d'analyse ou les multiples approches algorithmiques — et plus spécifiquement sur leur implémentation en MHD, domaine de recherche récent et ouvert (en comparaison avec l'étendue des travaux effectués en hydrodynamique). Outre les choix dans l'écriture numérique des équations MHD ainsi que dans les algorithmes permettant de les résoudre, nous avons en particulier été confronté au traitement difficile du champ magnétique sous la contrainte de la conservation du flux. Nous avons ensuite apporté une attention particulière au traitement des conditions aux limites et surtout aux méthodes de stabilisation d'un schéma numérique en y incluant de la dissipation artificielle ; l'algorithme que nous avons utilisé est en effet, par nature, sujet au développement d'oscillations à l'échelle de pas qui conduisent à la perte de toute information physique à la suite d'une déstabilisation numérique. Pour mettre en avant la physique correcte émanant du code mais aussi ses différentes lacunes, nous avons appris à simuler une série de situations tests et   en extraire l'information pertinente, pour parfois améliorer le code.

Nous avons également abordé des aspects plus pragmatiques mais néanmoins importants

d'optimisation de programme ou de parallélisation en vue de simulations sur des supercalculateurs.

Les développements numériques auxquels nous avons procédé nous ont permis d'acquérir une bonne expérience dans la façon de traiter des problèmes de MHD au moyen de codes de simulation. Cependant, les algorithmes écrits, bien que physiquement corrects, ne peuvent conduire à la production de résultats scientifiques novateurs dans les domaines nous concernant. Pour cela, nous devrions apporter des modifications majeures au code que nous avons présenté. Tout en conservant des techniques similaires nous pourrions certainement accroître ses performances (gain en précision et en stabilité) par l'utilisation de maillages croisés; ceux-ci permettent d'adapter le choix des nœuds de calcul au type de grandeur physique impliqué (scalaires au centre des mailles, flux sur leurs bords, etc.). Nous pourrions également affiner le traitement de la dissipation numérique et plus particulièrement la contribution hyper-visqueuse.

Cependant, pour plus d'efficacité il nous faudrait à présent bénéficier d'algorithmes robustes déjà utilisés dans la communauté astrophysique. Forts de nos acquis en MHD numérique, nous pensons être à même de faire évoluer des codes existants et éprouvés par différents types de simulations, pour nos propres applications.

Quatrième partie

Accélération de rayons cosmiques dans les Gamma-Ray Bursts

Publication

“Acceleration of UHE Cosmic Rays in Gamma-Ray Bursts”

Guy Pelletier et Evy Kersalé

Acceleration of UHE cosmic rays in gamma-ray bursts

G. Pelletier^{1,2} and E. Kersalé¹

¹ Laboratoire d'Astrophysique de l'Observatoire de Grenoble, B.P. 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

² Institut Universitaire de France

Received 3 April 2000 / Accepted 30 May 2000

Abstract. Gamma-Ray Bursts are good candidates of the “bottom up” scenario for the generation of the UHE Cosmic Rays. In the most discussed model of GRBs, namely the “fireball” model, a highly relativistic shock forms and seems capable of accelerating the cosmic rays up to the EeV range. However, only the first Fermi cycle produces a large energy gain to particles coming from the external medium. Thus, a complementary acceleration is proposed, downstream of the external shock, in the relativistic plasma of the GRBs, where crossings of relativistic fronts are likely to occur. Both forward and backward fronts are necessary for the internal Fermi acceleration to work and the physical process that generates them is presented. We found that there exists a relevant physical process similar to Brillouin backscattering that redistributes the incoming energy in the plasma shell. This redistribution occurs through the generation of sound waves that heat the plasma shell and also through the generation of both forward and backward relativistic Alfvén fronts that accelerate cosmic rays by the Fermi process. We show that this ensemble of processes is able to account for the generation of UHE cosmic rays.

There are two opportunities for these combined processes, first during the “primary” Gamma-Ray Burst where baryons are entrained by the relativistic pair wind, second during the predeceleration and deceleration stages when the fireball interacts with the interstellar medium. However, because of the synchrotron losses, only the second stage can produce the UHE cosmic rays.

Key words: gamma rays: bursts – ISM: cosmic rays – acceleration of particles – instabilities

1. Introduction

The origin of the cosmic ray population beyond 10^{15} eV is an important enigma of modern astrophysics which will hopefully be clarified by the Pierre Auger instrument. Beyond this energy, the galactic magnetic field is unable to scatter cosmic rays and moreover supernovae remnants cannot accelerate protons. Pulsars could accelerate protons up to 10^{17} eV. This population,

that has an isotropic energy spectrum with a powerlaw index 3.1, probably comes from extragalactic sources. The “knee” of the spectrum around 10^{15} eV is so smooth that the extragalactic contribution could be important at lower energy also.

The photoproduction of pions by cosmic ray protons on the Cosmic Microwave Background, the GZK-effect, occurs beyond the energy threshold of 3×10^{19} eV and higher energy protons cannot come from sources located farther than 100 Mpc (Aharonian & Cronin 1994). Few events beyond the GZK-threshold have recently been detected by AGASA (Hayashida et al. 1998) and the “Fly’s eyes” (Sokolsky 1998), and the Auger experiment will considerably improve the statistics of these events. These preliminary results suggest that a new population of cosmic rays is observed at energies higher than 10^{18} eV, because the spectrum becomes harder. The origin of these few events, although some pointing ability of the instruments, remains very uncertain. The identified extragalactic sources within 100 Mpc are very few.

Vietri (1995) and Waxman (1995) showed that the rate of GRBs in the Universe ($10^{-8} \text{ yr}^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$) and their energy ($10^{51} - 10^{53} \text{ erg}$) make them very good candidates as sources of the UHECRs, if 10% of their energy is converted into UHECR energy. The most considered GRB model, namely the “fireball” model (Rees & Mészáros 1992), is based on a relativistic blast wave having a Lorentz factor Γ_s larger than 10^2 , this high value being necessary for gamma photons to escape from pair production. A Fermi cycle at a relativistic shock can amplify the energy of cosmic ray by a factor Γ_s^2 . Thus two Fermi cycles could be sufficient to reach the expected energy of the UHECRs. However, Gallant & Achterberg (1999) recently showed that only the first cycle can produce such amplification, the next cycles amplifying by a factor of 2 only. Moreover the escape probability is large (0.3–0.5).

The GRB light curves indicate strong internal disturbances and they have been considered as the main cause of gamma-ray emission and a possible cause of cosmic ray generation (Waxman & Bahcall 1999; Daigne & Mochkovitch 1998). In this paper we propose an interpretation of these disturbances in terms of relativistic hydromagnetic fronts, calculate their generation through the streaming instability caused by baryon loading, show that there is an efficient nonlinear generation of both forward and backward waves, estimate the amount of energy

they extract from the fireball and calculate the acceleration of cosmic rays by their crossings. The baryon loading occurs first during the “primary” GRB when the relativistic pair wind entrains the debris of the progenitor, and then during the interaction of the fireball with the interstellar medium. Furthermore, the first loading is likely to occur in the “hypernova” scenario, however, this is less obvious in the “merging” scenario.

2. Loading baryons

The canonical fireball model (Rees & Mészáros 1992) presents a primary explosion during which the plasma is optically thick until t_* ($R_* = ct_*$), then an adiabatic and free expansion until the ambient medium starts to exert sufficient ram pressure; this defines a deceleration time t_d and a deceleration radius R_d (typically $t_* = 3 \times 10^{-3} t_d$). The third stage is thus the deceleration one during which most of the energy of the fireball is dissipated in the interstellar medium, giving rise to the afterglow. We assume that the fireball is initially composed of $e^+ - e^-$ pairs and that this ultra-relativistic wind of bulk Lorentz factor Γ , flowing along a strong poloidal magnetic field, is perturbed by ambient baryons of mass density ρ_b . There are two stages of baryon loading, during the “primary” GRB and during the interaction with the interstellar medium.

2.1. Hydrodynamics of the baryon loading stage

The main features of the hydrodynamics of the relativistic fireball can be derived from the energy invariant as long as the radiation losses are negligible (assuming radial magnetic field lines):

$$E = \int (e + \beta^2 P) \gamma^2 d^3v, \quad (1)$$

where e is the comoving energy-mass density, P the comoving pressure, β the flow motion (in unit of light velocity), and γ the Lorentz factor of the flow ($\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$), distributed around the typical bulk Lorentz factor Γ . We assume that the plasma shell is composed of a low pressure baryonic component of mass M and a high pressure relativistic component containing pairs and cosmic rays of average energy density in comoving frame $e_* = 3P$. We approximate the energy by the following expression, assuming an appropriate self-similar evolution of the shell (which allows us to properly define the bulk Lorentz factor):

$$E = M\Gamma c^2 + 4P\Gamma V_0, \quad (2)$$

where $V_0 = 4\pi R^2 \delta R_0$ is the covolume of the shell, $R(t)$ the shell radius, δR_0 its comoving thickness. During the expansion, the energy in the shell is redistributed between kinetic and internal energies through the competition of adiabatic cooling and heating by the flux of incoming matter. Part of the mass flux increases the low pressure baryonic mass: $\dot{M} = (1 - \alpha)\rho_b \Gamma c 4\pi R^2$; the other part contributes to the high energy component: $\dot{e}_*|_{\text{heating}} = \alpha\rho_b \Gamma c^3 4\pi R^2 / V_0$, assuming a

heating length shorter than the fireball width. The adiabatic cooling is such that $\dot{e}_*|_{\text{adiab}} = -\frac{4}{3}\frac{\dot{V}_0}{V_0}e_*$. Thus setting $\dot{E} = 0$, after some simple manipulations, we obtain (with $\alpha_0 \equiv 1 + \alpha/3$):

$$\alpha_0 \rho_b 4\pi R^2 c^3 \Gamma^2 + \frac{1}{3} \frac{\dot{V}_0}{V_0} M \Gamma c^2 + \left(\frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}_0}{V_0} \right) E = 0. \quad (3)$$

It can easily be checked that, when there is no mass input, an adiabatic expansion occurs such that $\Gamma = \Gamma_0 (V_0(t)/V_0(t_0))^{1/3}$ as long as $M\Gamma c^2 \ll E$, followed by a free expansion $\Gamma \simeq E/Mc^2$ when the internal energy has become smaller than the kinetic energy. Now to analyze the effect of the mass sweeping, we assume a self-similar expansion such that $d \ln V_0 / d \ln t = \chi$ and define the dimensionless quantity $\eta(t)$ (within a coefficient of order unity) as the ratio of the fireball energy over the swept energy-mass of the ambient medium, measured in the comoving frame, such that

$$E = \eta(t) \rho_b \frac{4}{3} \pi R^3 \Gamma^2 c^2. \quad (4)$$

Then Eq. (3) leads to the differential equation:

$$\frac{d\eta}{d \ln t} = 2\eta(\eta_\infty - \eta), \quad (5)$$

where η_∞ is the asymptotic value taken by $\eta(t)$, namely $\eta_\infty = \frac{3}{2} + \frac{\chi}{3}$. With $\eta(t_0) = \eta_0$, the solution is

$$\eta(t) = \eta_\infty \frac{\eta_0(t/t_0)^{2\eta_\infty}}{\eta_\infty - \eta_0 + \eta_0(t/t_0)^{2\eta_\infty}}. \quad (6)$$

The evolution starts in the adiabatic regime, $\eta(t) \simeq \eta_0(t/t_0)^{2\eta_\infty}$ and $\Gamma \propto t^{\chi/3}$. If η reaches its asymptotic value, then the bulk Lorentz factor decreases according to the canonic law $\Gamma \propto t^{-3/2}$. However, the interest of this derivation is to stress that this Blandford & Mc Kee (1976) law does not mean that a free expansion has been reached and a strong relativistic shock set up. Indeed the energy of the fireball can still be dominated by the internal energy, so that a shock does not form, and the incoming baryons interact with the fireball plasma through a streaming instability. This is probably what happens during the primary stage of baryon loading where a high entropy pair plasma entrains some baryonic mass, expected to be of the order $10^{-6} M_\odot$, coming from the debris of the progenitor. This interaction is probably more important than the final stage of interaction with the interstellar medium in generating perturbations in the flow as described in Sect. 2.3 and Sect. 3.

Thus there are two stages of baryon loading (see Fig. 1), the primary stage when the high entropy pair wind entrains a mass $M_0 \sim 10^{-6} M_\odot$ coming from the debris of the massive star giving rise to the hypernova or of the merging compact objects, and a secondary stage corresponding to the sweeping of the ambient interstellar medium but that loads typically $10^{-3} M_\odot$ only.

2.2. The magnetic field and some scales

We assume that this baryonic plasma flows along a strong poloidal magnetic field. This is the major assumption of this

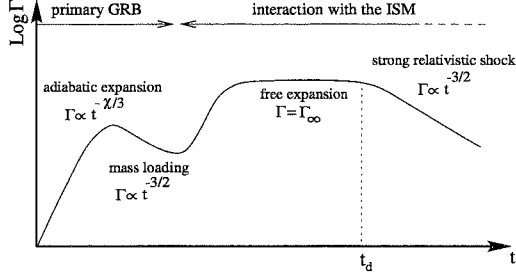


Fig. 1. Evolution in time of the Lorentz factor Γ . The deceleration giving rise to the afterglow starts at time t_d , after a free expansion involving the asymptotic bulk Lorentz factor $\Gamma_\infty = E/Mc^2$.

paper: $B > B_{eq}$ (we note $\beta_p \equiv (B_{eq}/B)^2 < 1$) and $B > B_m$ where B_{eq} is the equipartition field corresponding to the plasma pressure in the fireball, and B_m is the equipartition field corresponding to the ram pressure exerted by the incoming baryons.

$$B_m \simeq 10^2 \left(\frac{n_b}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{1/2} \frac{\Gamma}{10^3} \text{ Gauss}. \quad (7)$$

Indeed, the poloidal magnetic pressure follows the same decrease as the relativistic pressure with distance; for conical expansion, $B_p^2/8\pi \propto P \propto R^{-4}$. Moreover, a toroidal magnetic field is likely significant in the edge of the collimated flow and can play a confining role. The decay of the toroidal field is weaker, because $B_t \propto R^{-1}$ in a conical expansion. If the magnetic field dominates at the beginning, it remains so with the expansion. Moreover, a tiny initial toroidal component of the magnetic field can become dominant in the expansion and favors collimation. Like in extragalactic jets, the poloidal field can be dominant along the axis of the flow and the toroidal field dominant in the edge of the flow. Thus we assume an internal poloidal field such that $B_p = B_d(R/R_d)^{-2}$ with $B_d \gtrsim B_m$ at $R_d \sim 10^{16} \text{ cm}$ and an external toroidal field $B_t \gtrsim B_d(R/R_d)^{-1}$; in particular at R_* (typically $10^{-3} R_d$), $B \sim 10^8 G$. Of course these estimates are sensitive to the model of magnetic field distribution, however the numbers we proposed are reasonable and help to explain out what happens.

In the early stage the proton energy is severely limited by synchrotron losses. Assuming an acceleration time $t_{acc} = \kappa t_L$, where t_L is the Larmor time, the maximum proton energy is such that the acceleration time is equal to the synchrotron time and gives

$$\epsilon_{max} = 2 \frac{10^{11}}{\sqrt{\kappa}} \left(\frac{B}{1G} \right)^{-1/2} \text{ GeV}. \quad (8)$$

Taking $\kappa \simeq 10$, the energy of 10^{17} eV can be achieved only in the region where B is smaller than $B_s \simeq 10^6 G$, which requires $R > R_s \simeq 10^{-2} R_d$. Bearing in mind that Γ reaches a value between 10^2 – 10^3 , the UHECRs ($\sim 10^{20} \text{ eV}$ in the observer frame) are necessarily produced in the region $R > R_s$.

A neutrino radiation is produced during the early stage through pp-collisions thanks to Fermi acceleration. Indeed, ϵ_{max} given by (8) exceeds 1 GeV when $B < 10^{12} G$, therefore

where $R > R_h \sim 10^{-2} R_*$. This low energy neutrino emission ends when the pp mean free path becomes larger than δR , thus when $R = R_{pp} \sim 10^2 R_h \sim R_*$. This stage of Fermi acceleration supports the predictions made by Paczynski & Xu (1994), namely a neutrino emission between $30 \text{ GeV} - \text{TeV}$ of global energy of a few percent of the fireball energy.

2.3. Relaxation of the baryon stream in the fireball

In this subsection, we examine how the backstream of baryons in the fireball, initially composed of $e^+ - e^-$ pairs, undergoes a relaxation by triggering a beam instability in the pair plasma.

The hydromagnetic perturbations so produced scatter the baryons that are then entrained and some of them accelerate to high energy. We presume that these perturbations are those revealed by the light curve and which also accelerate the electrons responsible for the synchrotron and inverse Compton gamma-emission. Indeed, initial perturbations do not amplify in the expansion, they even decay (this differs from an expanding universe that is self-gravitating). Therefore we stress that these perturbations must be generated during the expansion by the appropriate instability.

At the presumed energy of the particles, the Coulomb interactions are negligible (indeed, for relativistic electrons, the Coulomb cross section is as low as the Thomson cross section; as long as the shell is optically thin to Compton scattering, the mean free path is larger than the shell width; this is of course more obvious when protons are involved in the collision). Therefore the incoming baryons interact only with the magnetic field carried by the fireball. The magnetic field represents a more efficient obstacle if it is perpendicular to the flow, and the interaction starts in the form of an intense backward fast magneto-sonic wave. In a confined relativistic plasma, the fast mode propagates with a Lorentz factor $\gamma_F = \gamma_S \gamma_*$, where the sound Lorentz factor (corresponding to the parallel slow mode actually) $\gamma_S = \sqrt{3}/2$ and the Lorentz factor of the generalized Alfvén waves (see Pelletier & Marcowith 1998) $\gamma_* = \left(1 + \frac{1}{2\beta_p}\right)^{1/2}$. However, since we consider a collimated expansion, the most natural circumstance is the interaction along the parallel magnetic field within a wide solid angle around the axis.

In this scope, the interaction scenario is the following. In the comoving frame, the proton back-stream, of velocity $v_b = \beta_b c$ and Lorentz factor Γ_b , along the field line generates backward Alfvén waves of velocity $V_* = \beta_* c$ at a rate g given by (Marcowith et al. 1997; Pelletier & Marcowith 1998):

$$g = g_0 \frac{\Gamma}{\Gamma_b} \sqrt{\beta_b - \beta_*}, \quad (9)$$

where $g_0 \equiv \frac{\omega_{pi}}{\Gamma} (2\beta_*)^{-1/2}$, ω_{pi} being the plasma frequency of the ions in the stream. This maximum growth occurs for the wave number

$$k_0 = \frac{\omega_{ci}}{\Gamma_b(v_b - V_*)} \simeq \frac{\gamma_*^2 \omega_{ci}}{\Gamma_b c}. \quad (10)$$

When these backward waves have reached a high level, they scatter the baryons that are then entrained by the pair flow. Thus,

we presume that the large internal disturbances observed in the light curve result from loading baryons in the fireball either at the early stage of the explosion or during the “free” expansion stage. At the beginning of the fireball expansion in the interstellar medium, the diffusion length is not short enough compared to the narrow width of the shell. Then baryon entrainment starts when the level of the resonant Alfvén waves (hereafter A-waves) is strong enough to get a diffusion length shorter than the shell thickness. Then the kinetic flux of the incoming baryons is transformed into a backward flux of intense A-waves. As long as these waves do not interact with the plasma shell (their wavelengths are larger than the dissipation scale), the shell does not decelerate and just an electromagnetic wake is generated propagating towards to shell center but more slowly than the ultrarelativistic expansion of the shell so that it seems to advance. Thus for a baryon mass loading rate $\dot{M}_b = 4\pi R^2 \rho_b \Gamma c$, the energy flux, measured in the comoving frame, generated in the form of backward disturbances in the shell is:

$$S = V_* W_* = \frac{\dot{M}_b}{4\pi R^2} \Gamma c^2. \quad (11)$$

For a fireball of initial energy E_0 , this baryon loading produces only a weak shell deceleration as long as

$$t < t_d = \frac{3E_0}{\dot{M}_b \Gamma c^2}, \quad (12)$$

where t_d is the deceleration time. In other words, the shell is still weakly perturbed as long as the mass loading rate is smaller than $\dot{M}_d = \rho_b \Gamma 4\pi R_d^2 c$ where $R_d = ct_d$ is the deceleration radius. There are in fact two deceleration radii corresponding to the two stages of baryon loading.

The relaxation of the baryon stream in the fireball is described by the following simplified model coupling the relative level of Alfvén energy density u with the relative motion of the stream $\beta_b - \beta_*$ with respect to the backward A-waves so-generated. The coordinate r denotes the radial distance from this external sheet, increasing r means approaching the shell center and the “initial” condition is $\Gamma_b(0) = \Gamma$.

$$V_* \frac{du}{dr} = 2gu \quad (13)$$

$$c \frac{d\Gamma_b}{dr} = -\nu \beta \Gamma_b \quad (14)$$

where in a quasi-linear approximation the slowing rate $\nu = \nu_0 u$, the more intense the waves the more efficient the scattering. The energy flux conservation implies that

$$\nu_0 = \frac{2g\Gamma}{u_\infty \beta_* \beta \Gamma_b} \quad (15)$$

where u_∞ is the asymptotic value of u , namely $W_*/(B^2/8\pi)$ given by (11) and thus $u_\infty = (B_m/B)^2 < 1$.

The relaxation of the stream can be characterized by a single typical length $l_r = V_*/g_0$. Fig. 2 illustrates the stream relaxation in the shell that occurs in few l_r .

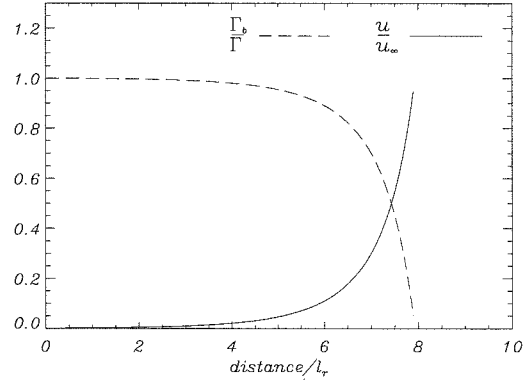


Fig. 2. Stream relaxation and growth of the waves. The final relaxation stage, for $\beta < \beta_*$, is just a fast isotropisation involving plasma microphysics not detailed in this paper. The transition to the non-relativistic regime gives rise to a stiff variation.

Let us consider the interaction with the interstellar medium. The typical wavelength of the excited waves, measured in light seconds (l_{sec}), is such that

$$\lambda_0 \simeq 10^{-3} \frac{\Gamma}{10^3} \left(\frac{B}{10^3 G} \right)^{-1} l_{sec}, \quad (16)$$

whereas the relaxation length is

$$l_r \simeq \frac{\Gamma}{10^3} \left(\frac{n_b}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} l_{sec}. \quad (17)$$

This has to be compared with the shell width in the comoving frame; at the deceleration time its estimate is (Rees & Mészáros 1992)

$$\delta R_d \simeq 3 \times 10^2 \left(\frac{n_b}{1 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/3} \left(\frac{\Gamma}{10^3} \right)^{-5/3} \times \left(\frac{E}{10^{51} \text{ erg}} \right)^{1/3} \left(\frac{\Omega}{4\pi} \right)^{-2/3} l_{sec}.$$

Let us consider now the interaction in the “primary” GRB. Expanding $10^{-6} M_\odot$ within a sphere of one light-second radius (comoving) leads to a particle density of 10^{19} cm^{-3} . The plasma is now collisional, but the collective process previously developed provides a faster relaxation than both Coulomb and pp-collision ones. The typical wavelength $\lambda_0 \simeq 10^{-10} \frac{\Gamma}{10^3} \left(\frac{B}{10^{10} G} \right)^{-1} l_{sec}$ and the relaxation length $l_r \simeq 10^{-9} \frac{\Gamma}{10^3} \left(\frac{n_b}{10^{18} \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} l_{sec}$. Incidentally, we note that although the time is quite short, the density is so high that the Lawson criterium for fusion is largely satisfied; moreover the thermal energy of the particles is high ($\bar{\epsilon} \sim 10^{12} \text{ eV}$). Thus, alpha particles and neutrons should be produced and moreover, as mentioned previously, a significant neutrino emission.

Once the relaxation is achieved, there are two major non-linear interactions with the plasma shell through magnetosonic compression. First, intense backward A-waves that propagate almost parallel to the magnetic field produce fast magnetosonic

compression governed by the Hada's system generalized to relativistic plasma by Pelletier & Marcowith (1998). The transverse magnetic perturbation b (reduced to the averaged field) exerts a pressure that produces fast parallel perturbed motion u_{\parallel} (specific momentum) that is proportional to the parallel electric field (see Pelletier 1999). This, parallel electric field is responsible for particle acceleration or stochastic heating. For delocalized waves, particles that resonate with the parallel electric field produce the nonlinear Landau damping of the A-waves. The so-produced E_{\parallel} efficiently injects electrons and positrons in the high energy population.

There is also another strong nonlinear effect with the slow magnetosonic mode (S-mode) that efficiently backscatters the primary flux of A-waves. This is presented in the next section.

3. Brillouin backscattering

As seen in the previous section, the flux of backward A-waves becomes stronger and stronger as long as the shell is still entraining baryons. If these waves are not be absorbed in the plasma shell, no deceleration nor heating of the shell would stem from the relaxation of the incoming baryons. Moreover, Fermi acceleration with these waves can work only if there are both forward and backward waves. One could expect some reflection of these waves in the internal edge of the shell; however, because they propagate at a velocity close to the light velocity, no significant change of impedance and thus no significant reflection occurs at the edge. Both absorption and backscattering efficiently develop by excitation of sound or slow magnetosonic modes.

3.1. Parametric Brillouin instability

A large fraction of this flux can be backscattered (thus producing a forward A-flux) by exciting the slow mode of the shell plasma. This is analogous to the Brillouin backscattering, but with A-waves instead of ordinary electromagnetic waves. The analogous Raman scattering does not work with A-waves (three mode couplings does not work with A-waves). A mother A-wave (ω_0, k_0) of relative amplitude b_0 spontaneously gives rise to a slow magnetosonic mode (ω_s, k_s), but this S-mode is unable to carry the whole flux of energy-momentum and a backward (forward with respect of the shell expansion) A-wave is generated with a lower energy-momentum (ω_-, k_-) such that:

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_- \text{ and } k_0 = k_s + k_- . \quad (18)$$

For parallel propagating resonant waves,

$$k_s = \frac{2k_0}{1 + V_s/V_*} \text{ and } k_- = k_0 \frac{1 - V_s/V_*}{1 + V_s/V_*} , \quad (19)$$

one gets the most efficient rate of coherent wave decay:

$$G_{decay} = \frac{1}{2} \sqrt{\omega_s \omega_-} \left(\frac{b_0^2}{2\beta_p} \right)^{1/2} . \quad (20)$$

This result is a particular solution that can be derived from the complete analysis made by Champeaux et al. (1999). For incoherent scattering, the decay rate is lower, proportional to $b_0^2/2\beta_p$ instead of its square root.

The S-modes are in turn absorbed by resonant interaction with "thermal" particles. This process is clearly the most efficient to transmit the momentum and energy of the baryon stream to the plasma shell.

Now intense forward and backward flux of long A-waves are still remaining. There is no other way to absorb them than cosmic ray acceleration through Fermi processes that involve resonant interaction between high energy particles and long A-waves.

3.2. A toy model of the backscattering process

In principle, solving the nonlinear system that governs the backscattering process allows us to predict how the dissipated energy is shared between heating the thermal particles of the shell and acceleration of cosmic rays. The detailed theory involves the numbers of quanta for each mode (N_+, N_-, N_s) for the mother A-waves, the backscattered A-waves and the generated slow waves respectively), a probability rate of scattering w and absorption rate ($\gamma_+, \gamma_-, \gamma_s$), all these triplets depending of the three wave vectors. In this paper we merely address a very simplified version of the system, similar to the system obtained with random phase approximation, but averaged over the spectral bands. We think it would be useful to solve such a toy system to illustrate the process and to see whether reasonable estimates can be obtained by developing this method. For the sake of simplicity, we assume that backscattering occurs behind the stream relaxation sheet (in fact, it could even start in the relaxation sheet). The system is thus the following (in this notation a backscattered wave propagates outwards):

$$V_* \frac{\partial}{\partial r} N_+ = -w(N_+ N_s + N_+ N_- - N_- N_s) - \gamma_+ N_+ \quad (21)$$

$$-V_* \frac{\partial}{\partial r} N_- = w(N_+ N_s + N_+ N_- - N_- N_s) - \gamma_- N_- \quad (22)$$

$$V_s \frac{\partial}{\partial r} N_s = w(N_+ N_s + N_+ N_- - N_- N_s) - \gamma_s N_s \quad (23)$$

The absorption rate γ_s of the S-waves by the "thermal" plasma is always larger than the absorption rates γ_+ and γ_- of the A-waves by cosmic rays (gyro-synchrotron absorption); moreover the S-waves have shorter wavelengths than the A-waves, the backscattered waves have even larger wavelengths than their mother wave and thus even less absorbed. There are two scales in the system: a short characteristic scale associated to the growth of the S-waves $l_s = V_s/(\gamma_s - G)$, where $G = w(N_+(0) - N_-(0))$ is the nonlinear scattering rate, and a longer scale associated with the decay of the mother waves $l_* = V_*(\gamma_s - G)/\gamma_s G$; $l_s \ll l_*$ when $G \ll \gamma_s$. This decay length $l_* \sim \beta \lambda_0/u$. A ratio T of the incident flux is transmitted, a ratio R is reflected, a ratio A is absorbed and one has:

$$T + R + A = 1 ; \quad (24)$$

and the absorption ratio is divided into a thermal one through S-waves, A_s , and a nonthermal one through A-waves, A_* . Thus when $V_*/\gamma_+ < \delta R$, $T \simeq 0$. By solving the system, one ob-

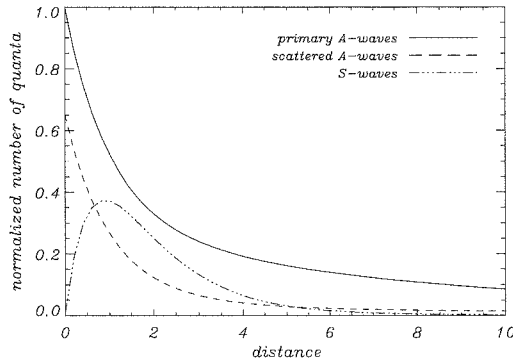


Fig. 3. Solutions of the backscattering system. By order of decreasing line thickness we show $N_+/N_+(0)$, $N_-/N_+(0)$ and $N_s/N_+(0)$. The distance unit is the scattering length defined by $V_*/\omega N_+(0)$. In this example $\gamma_+ = 0.1$, $\gamma_- = 0.05$ and $\gamma_s = 0.69$.

tains the backscattering rate: $R = \frac{\omega_- N_-(0)}{\omega_0 N_+(0)}$. One calculates the thermal absorption ratio:

$$A_s = \frac{\int_0^\infty \gamma_s \omega_s N_s dr}{V_* \omega_0 N_+(0)}. \quad (25)$$

The absorption rate into cosmic rays is deduced by using (24). Such a calculation is illustrated in Fig. 3. For reasonable absorption rates, we obtain $R \simeq 0.17$, $A_s \simeq 0.53$ and $A_* \simeq 0.30$. Of course, a more realistic calculation should be made to predict these ratios, but this simple model indicates that, through the backscattering process, a sizable fraction of incoming energy can be converted into cosmic rays. In particular, a more detailed calculation would take into account that the longer wavelength modes are less damped and thus can be transmitted behind the shell.

The combined process of stream relaxation and Brillouin scattering followed by energy absorption by particles occurs first during the “primary” stage of the relativistic expansion when the pair wind entrains ambient baryons coming from the progenitor debris. As argued previously, this interaction is likely to occur without shock formation. Then after a new adiabatic and free expansion, a new stage of interaction occurs with the interstellar medium. The ratio of the energy dissipated by the cosmic rays acceleration over the initial fireball energy is $E_{cr}/E = A_* R(t)^3 / R_d^3$ before the deceleration time; thus, at $R = 0.3 R_d$, about 10% of the fireball energy is converted into cosmic rays. When the fireball radius reaches the deceleration radius, a strong collisionless shock is set up. However it can be considered as a hardening of the previous process. Indeed, incoming protons are reflected in the relaxation front giving rise of the external shock, whereas the backward magnetosonic wavefronts turn to internal shocks. The previous description applies during the predeceleration stage. However, although the theory of beam-plasma instability is no longer relevant when the shock is set up, the Alfvén fronts are still behind the shock and still accelerate cosmic rays efficiently.

4. Fermi acceleration of UHE cosmic rays

As stressed by Pelletier (1999), intense forward and backward A-waves of long wavelength (delocalized or localized) are necessary to accelerate UHE Cosmic Rays. The intense localized fronts propagate with a nonlinearly modified velocity such that $\gamma_* \mapsto \gamma_{nl} = \gamma_* + \delta\gamma$ with $\delta\gamma/\gamma_* \sim \beta_* b_m^2$ (b_m being the maximum reduced amplitude of the perturbed magnetic field of the front measured in its comoving frame). These intense wave packets scatter particles of Larmor radius smaller than their width or wavelength in their frame in a few gyro-periods. In a scattering time, the particles energy gains a factor γ_*^2 and the momenta are concentrated in the front cone of half-angle $1/\gamma_*$. Further acceleration requires other fronts propagating in the opposite direction, because wavefronts propagating in the same direction at almost the same velocity V_* tend to roughly isotropize the distribution of interacting particles with respect to their comoving frame. Thus it is crucial to get both forward and backward fronts to accelerate cosmic rays and the Brillouin backscattering process of Sect. 3, that generates longwavelength perturbations in a time $\sim G^{-1}$, is the appropriate and efficient solution. The relativistic regime of Fermi acceleration is deeply different from the nonrelativistic regime, not only because of the anisotropy effect but also because the acceleration time scale can become shorter than the scattering time scale. This is a crucial advantage that is illustrated by the following result (Pelletier 1999) obtained in the case of a permanent flux of both forward and backward waves, the energy gain during a time Δt , smaller than the scattering time, is such that

$$\langle \Delta p^2 \rangle = p^2 \beta_*^2 \gamma_*^2 \nu_s \Delta t, \quad (26)$$

where ν_s is the scattering frequency. Moreover, because $B > B_{eq}$, $\gamma_* > 2$, and the energy jump at each scattering is large and the statistic evolution cannot be treated by a Fokker-Planck description.

Let us give some more details about the localized fronts. Intense longwaves tend to self-organize in forward and backward relativistic fronts of amplitude $b_m \sim (r_*/\xi)^{-1/2}$, where ξ is the front width and $r_* = (\langle \gamma^2 \rangle / \bar{\gamma}) V_*/\omega_c$ is the minimum scale of relativistic MHD (Pelletier & Marcowith 1998); it is worth noting that the perturbation amplitudes appear Γ^2 times larger in the observation frame. At each crossing of these fronts, the gain is by a factor γ_*^4 within few gyro-periods. Such localized fronts can be approximately described as solitons (Pelletier & Marcowith 1998; Pelletier 1999), they differ from ideal solitons because of the Fermi acceleration that produces a kind of Landau-synchrotron damping of them. When ideal solitons cross each other they do not destroy, whereas damping destroys them and their complete absorption corresponds to the strongest efficiency of the Fermi process. A similar idea was used by Daigne & Mochkovitch (1998) with internal shocks to explain the gamma emission. Here we interpret the internal shocks as internal Alfvén fronts which can contribute to short scale variations in the light curve, and possibly more easily than pure hydrodynamic shocks.

For a bulk Lorentz factor of the shell of 10^3 , particles in GRBs have to reach 10^{17} eV in the comoving frame in order to supply the UHE Cosmic Rays population beyond the GZK threshold. We consider the interaction with the interstellar medium only because, as previously showed, synchrotron losses prevent UHE cosmic ray production, inside a radius R_s (Sect. 2.2). Assuming that the largest wavelengths are one tenth of the effective shell width (limited by causal connection), a magnetic field just larger than the equipartition value at deceleration radius ($B_{eq} \sim 10^3 \text{ G}$ say) is enough to get Larmor radii of that size (i.e. $\sim 10^{-5} \text{ pc}$), which corresponds to an energy of order 10^{17} eV . With $\bar{\gamma} \sim 10^8$, the scale $r_* \sim 10 \text{ l.sec.}$. Therefore, few fronts having a width of $1-10 r_*$ that cross each other within a shell width of $3 \times 10^2 \text{ l.sec.}$ can produce protons of 10^{21} eV within one second with respect of an observer frame during the interaction with the interstellar medium. When the strong relativistic shock has formed ($R > R_d$), external particles gain energy by a first Fermi half-cycle by a factor Γ_s^2 . They are then injected in the relativistic A-fronts behind the shock and suffer further acceleration up to the ultimate energy.

The local distribution is more likely quasi monoenergetic rather than a powerlaw. However the local characteristic energy is proportional to the product BR and thus the global distribution reflects the distribution of the product BR ; as stated by Pelletier (1999), a distribution close to ϵ^{-2} is obtained for $B \propto R^{-m}$ with m close to 2.

Our main conclusion is that Gamma-Ray Bursts are capable of producing the UHE Cosmic Rays through a Fermi process with relativistic Alfvén waves. These intense waves are generated by the two stages of baryon entrainment, first during the primary GRB stage, second during the interaction with the interstellar medium. The Fermi process works because of the Brillouin backscattering process that turns out to be appropriate and efficient, moreover it allows the heating and deceleration of the shell plasma by the incoming flux. Although the primary

stage does not produce UHE cosmic rays because of synchrotron losses, the Fermi acceleration allows the maintenance of a high energy proton population between R_h and R_{pp} that can emit a significant low energy neutrino flux of the order $10^{-2} E$. A high energy neutrino flux can be generated through the $p\gamma$ -process by UHE cosmic rays at the end of the free expansion, typically a sizable fraction of the UHE cosmic ray energy in the form of $10^{14}-10^{16} \text{ eV}$ neutrinos (Rachen & Mészáros 1998).

Acknowledgements. The authors are grateful to Y. Gallant, G. Henri, A. Marcowith, R. Mochkovitch and J. Rachen for fruitful discussions.

References

- Aharonian F.A., Cronin J.W., 1994, *Phys. Rev. D* 50, 1892
- Blandford R.D., McKee C.F., 1976, *Phys. Fluids* 19, 1130
- Champeaux S., Laveder D., Passot T., Sulem P.L., 1999, *Nonlinear Processes in Geophysics* 6, 169
- Daigne F., Mochkovitch R., 1998, *MNRAS* 296, 275
- Gallant Y., Achterberg A., 1999, *MNRAS* 305, L6
- Hayashida N., Honda K., Inoue N., et al., 1998, In: Paul J., Montmerle T., Aubourg E. (eds.) *Abstracts of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, held in Paris, France, Dec. 14–18, 1998, CEA Saclay
- Marcowith A., Pelletier G., Henri G., 1997, *A&A* 323, 271
- Paczynski B., Xu G., 1994, *ApJ* 427, 708
- Pelletier G., 1999, *A&A* 350, 705
- Pelletier G., Marcowith A., 1998, *ApJ* 502, 598
- Rachen J., Mészáros P., 1998, *Phys. Rev. D* 58, 123005
- Rees M.J., Mészáros P., 1992, *MNRAS* 258, 41
- Sokolosky P., 1998, In: Paul J., Montmerle T., Aubourg E. (eds.) *Abstracts of the 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, held in Paris, France, Dec. 14–18, 1998, CEA Saclay
- Vietri M., 1995, *ApJ* 453, 883
- Waxman E., 1995, *ApJ* 452, L1
- Waxman E., Bahcall J.N., 1999, *Phys. Rev. D* 59, 023002

Annexes

Annexe A

Méthodes d'études des instabilités linéaires

Sommaire

A.1 Définition de la stabilité	199
A.2 Linéarisation des équations	201
A.3 Méthode des conditions initiales	202
A.4 Principe de la décomposition en modes propres	203
A.5 Analyse en temps des modes propres	204
A.6 Analyse spatiale des modes propres	204
A.7 Principe de minimisation de l'énergie	208

Sur l'infinité de configuration MHD simples potentiellement envisageables — *i.e.* vérifiant les équations de la MHD — peu correspondent à des régimes de paramètres qui les rendent effectivement viables. Pour la majorité d'entre eux les conditions physiques les caractérisant sont telles que ces configurations ne peuvent exister. La raison de cela réside dans l'instabilité inhérente de ces structures ou flots MHD, c'est-à-dire dans leur incapacité à supporter les petites fluctuations qui prennent nécessairement naissance en leur sein. L'étude de la stabilité des plasmas MHD consiste justement à établir les cadres dans lesquels un plasma est stable ou instable vis-à-vis de ces perturbations propres à tout système physique.

Dans cette annexe nous allons passer en revue les différentes méthodes et les outils mathématiques associés qui permettent les études de stabilité d'écoulements MHD. Brièvement nous allons regarder les conséquences d'un choix de conditions initiales pour rapidement nous intéresser à la méthode de décomposition en modes propres puis au principe de minimisation de l'énergie.

A.1 Définition de la stabilité

Avant tout, il est nécessaire de définir de façon explicite la notion de stabilité dynamique d'un système physique. Par stabilité on entend la capacité d'un système à rester dans un

état d'équilibre — tel que la somme des forces qu'il subit reste nulle — compte tenu des fluctuations infimes des grandeurs physiques le caractérisant. Lorsque l'on écarte un système de sa position d'équilibre, sous l'effet d'une force de rappel il peut tendre naturellement à regagner sa position d'équilibre à moins qu'un mécanisme quelconque ne le pousse à s'en éloigner. Dans le premier cas on parlera d'un système stable tandis que le second sera dit instable. Bien entendu un système ne peut être considéré comme stable seulement s'il l'est vis-à-vis de toutes les formes possibles de perturbations.

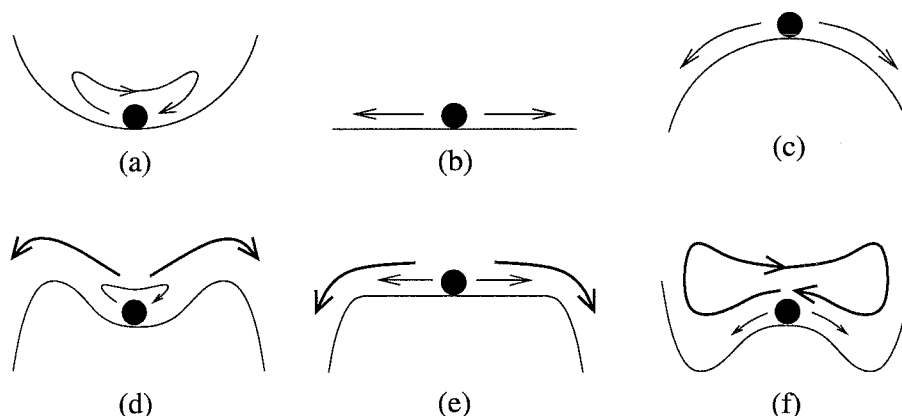


FIG. A.1 – *Analogie mécanique des mécanismes d'instabilité.*

Le schéma le plus couramment utilisé pour introduire la notion de stabilité est celui présenté sur la figure A.1 où une boule soumise à un champ gravitationnel vertical est placée sur une surface successivement concave puis convexe. La figure (a) décrit un système linéairement stable ; en l'absence de dissipation — à énergie mécanique constante — si l'on déplace de manière infinitésimale la boule depuis son point d'équilibre elle oscillera ensuite indéfiniment autour de cette position. Dans le cas où une force de frottement agit sur la boule, ces oscillations sont amorties. En revanche, la figure (c) montre qu'un écart initial à la position d'équilibre de la boule va aller en s'accroissant — qu'il y ait ou non de la dissipation ; le système est alors linéairement instable. La transition entre ces deux régimes, représentée sur la figure (b), constitue le domaine de stabilité marginale. La somme des forces agissant sur le mobile est alors identiquement nulle, mais il est évident qu'une légère modification des caractéristiques physiques du système va provoquer son passage dans l'un ou l'autre des régimes de stabilité ou d'instabilité.

Afin d'avoir un aperçu sur le développement futur d'une instabilité linéaire, il est fondamental de s'intéresser à la réponse du système non plus à des perturbations infinitésimales mais d'amplitude finie, c'est-à-dire à des fluctuations dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que les quantités d'équilibre. La figure A.1 présente trois cas particuliers de comportement non linéaire. Sur la figure (d) nous voyons que la boule est stable vis-à-vis de petites perturbations de sa position (stabilité linéaire) mais est instable lorsque elles deviennent fortes (instabilité non linéaire). En revanche, sur la figure (f), nous remarquons un comportement inverse du système (instabilité linéaire mais stabilité non linéaire). La figure (e) montre le

cas d'un système métastable : vis-à-vis de perturbations infinitésimales il est marginalement stable, en revanche lorsque l'on entre dans le régime non linéaire et que le déplacement de la boule par rapport à l'équilibre devient important le système est instable.

Nous avons précédemment expliqué qu'un système physique est stable lorsque la force de rappel qui tend à le ramener à l'équilibre est suffisamment forte pour contrebalancer l'effet d'un mécanisme déstabilisant quelconque. En l'absence de dissipation, le système se met alors à osciller autour de son équilibre. Il se peut toutefois que cette force de rappel soit trop importante et provoque, effectivement, des fluctuations du milieu autour de son état d'équilibre mais cela avec une amplitude croissante dans le temps. Le milieu est instable et on parle alors de sur-stabilité.

Une fois défini le concept de stabilité dynamique d'un système physique nous allons présenter l'outillage mathématique permettant de décrire puis d'étudier les mécanismes de déstabilisation.

A.2 Linéarisation des équations

La complexité inhérente des équations déterminant l'évolution d'un plasma MHD est telle qu'il est impossible dans la majorité des cas de mener à bien une étude de stabilité non linéaire sans passer par l'utilisation d'outils de simulation numérique lourds.

En outre, dans la communauté des physiciens des plasmas et plus particulièrement dans le domaine de la fusion contrôlée il existe un consensus pour affirmer que les instabilités purement MHD — dont le moteur n'est pas externe au plasma — sont extrêmement virulentes et produisent des modifications notables dans les structures d'équilibre. Les études se contentent donc souvent des approches linéaires qui permettent d'apprendre dans quels régimes de paramètres le plasma sera stable ou instable alors que les études non linéaires conduisent plutôt à déterminer les détails de l'auto-destruction de la structure d'équilibre du plasma MHD. Ceci justifie en soit pleinement l'intérêt de l'étude des instabilités linéaires.

Les méthodes développées dans la suite de cette partie se fondent sur l'hypothèse de perturbations infinitésimales d'un état stationnaire du plasma ; par cela on entend qu'elles restent très petites devant les grandeurs physiques propres de l'équilibre. Les quantités auxquelles nous nous intéressons s'écrivent comme :

$$X(\vec{r}, t) = X_o(\vec{r}) + \delta X(\vec{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

où $X_o(\vec{r})$ est la valeur d'équilibre, par définition indépendante du temps, de la grandeur physique X et $\delta X(\vec{r}, t)$ sa fluctuation. Nous supposons de plus que :

$$\left| \frac{\delta X}{X_o} \right| \ll 1.$$

Dans ce cadre de travail nous pouvons effectuer la linéarisation des équations d'évolution du plasma. Cette opération consiste à substituer (A.1) dans les équations pertinentes puis à

négliger devant les termes linéaires tous les produits et toutes les élévations à des puissances plus grandes que l'unité des écarts δX à la solution stationnaire. Cette méthode est appliquée dans la section II-2.1 lors du calcul des équations de dispersion des ondes MHD linéaires.

Dans le cadre de la MHD il est souvent très confortable de ramener les équations d'évolution à un système de trois équations aux dérivées partielles et couplées portant sur le vecteur déplacement infinitésimal $\vec{\xi}$. Ce système, calculé en annexe B, s'écrit de façon générique comme :

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \partial_{\vec{r}}, \partial_t) \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{A.2})$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel linéaire et stationnaire.

Un formalisme similaire est employé dans l'étude de la réponse $r(t)$, d'un système physique linéaire et stationnaire, caractérisé par une réponse impulsionnelle $\mathcal{H}(t)$, à une sollicitation $s(t)$. Cette réponse s'exprime comme un produit de convolution :

$$r(t) = \mathcal{H}(t) * s(t) = \int_0^t \mathcal{H}(t-t') s(t') dt', \quad \mathcal{H} \text{ et } s \text{ étant causales.} \quad (\text{A.3})$$

Au sens des distributions nous pouvons remplacer les dérivées temporelles du déplacement présentes dans l'opérateur \mathcal{L} de (A.2) par les produits de convolution des dérivées de la distribution δ de Dirac¹ avec $\vec{\xi}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) * \vec{\xi}(\vec{r}, t).$$

Ainsi la relation (A.2), prend une forme analogue à (A.3) :

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \partial_{\vec{r}}, \delta(t)) * \vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{S}(\vec{r}, t), \quad (\text{A.4})$$

où, afin d'être cohérent dans la description physique de l'évolution temporelle du système, nous avons introduit un terme source $S(\vec{r}, t)$ qui à travers son action sur le plasma est à l'origine des fluctuations de $\vec{\xi}$. Nous constatons dans cette approche qu'une étude de stabilité se ramène à un problème d'inversion. Or, la causalité des distributions \mathcal{L} et $\vec{\xi}$ va nous permettre de déployer les méthodes liées à la transformation de Laplace pour résoudre ce problème d'inversion.

A.3 Méthode des conditions initiales

Ce premier moyen d'investigation consiste simplement à se donner un champ de fluctuations initiales à travers le vecteur déplacement, $\vec{\xi}(\vec{r}, 0)$, ou plus communément à travers la perturbation de la vitesse de la matière, $\delta \vec{v}(\vec{r}, 0) = \partial/\partial t \vec{\xi}(\vec{r}, 0)$. La première condition correspond à une configuration où l'on déplace légèrement chaque élément fluide de sa position d'équilibre tandis que la seconde correspond à une situation où le plasma reste à sa position

1. δ est par définition l'identité du produit de convolution : $\delta * f = f$.

d'équilibre mais où on lui confère un petit mouvement. Pour compléter cette formulation du problème il est nécessaire, en plus de se donner une condition initiale sur $\vec{\xi}$ ou sur sa dérivée temporelle, de fixer le comportement approprié de ces quantités aux limites du système étudié.

Au moyen d'outils numériques idoines, cette méthode relativement simple présente l'avantage de déterminer exactement la réponse d'un milieu à un type de sollicitations particulier. En contrepartie, elle introduit souvent dans la problématique beaucoup plus d'informations que cela n'est nécessaire pour conclure au sujet de la stabilité d'un plasma ; ce manque d'acuité se traduit en pratique par une dépense excessive de ressources numériques.

A.4 Principe de la décomposition en modes propres

Une manière plus efficace de traiter le problème de la stabilité d'un plasma MHD est de reformuler la relation (A.2) en terme de modes propres. Pour cela, nous allons chercher à mettre en évidence les fréquences caractéristiques des perturbations qui tendent naturellement à se développer dans le plasma.

Le déplacement $\vec{\xi}$ étant une fonction causale (*i.e.* nulle pour $t < 0$) nous allons exploiter les propriétés de sa transformée de Laplace donnée par :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, \omega) = \int_{\mathbb{R}^+} \vec{\xi}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

La fonction $\vec{\xi}(\omega)$ est définie pour tout ω dont la partie imaginaire est telle que $\text{Im}(\omega) > \sigma_0$. L'inversion de la transformée de Laplace détermine $\vec{\xi}$ de façon unique :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+ + i\sigma} \vec{\xi}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \forall \sigma > \sigma_0. \quad (\text{A.5})$$

Pour introduire le concept de mode propre nous pouvons par exemple remplacer $\vec{\xi}$ par (A.5) dans la relation (A.2). L'opérateur \mathcal{L} étant indépendant de ω on peut le faire passer dans l'intégrale et en déduire :

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \partial_{\vec{r}}, i\omega) \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} = 0, \quad (\text{A.6})$$

les dérivées temporelles dans \mathcal{L} se traduisant par l'élévation à la puissance de $i\omega$. Une méthode équivalente consisterait à effectuer la transformée de Laplace de la relation (A.4) en posant le terme source égal à zéro. Les différentes fonctions $\vec{\xi}(\vec{r}, \omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t}$ solutions de (A.6) sont appelées modes propres du système ; ce sont les fluctuations qui se développent spontanément lorsque l'on injecte une petite quantité d'énergie dans le plasma à l'équilibre. Quant aux différentes valeurs ω_α , ce sont les fréquences propres du milieu.

L'ensemble des modes propres constitue une base complète de fonctions sur laquelle on peut décomposer toute forme de perturbation. Cette base est a priori la plus adaptée pour

l'étude du système considéré contrairement, entre autres, à la famille des fonctions de Fourier qui engendre cette base propre mais ne constitue pas, elle-même, en toute rigueur une base.

Dans le cas d'un plasma MHD soumis à aucune contrainte extérieure, nous montrons en annexe B que l'opérateur \mathcal{L} ne présente qu'une dérivée seconde temporelle — due à l'inertie. En découplant les parties spatiale et temporelle de \mathcal{L} , (A.6) devient :

$$\mathfrak{F}(\vec{r}, \partial_{\vec{r}}) \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, \omega) = -\rho_o \omega^2 \vec{\xi}(\vec{r}, \omega), \quad (\text{A.7})$$

où $\mathfrak{F} \cdot \vec{\xi}$ s'identifie à la densité volumique de force agissant sur le milieu et ne dépend que de l'espace. La relation (A.7) a une structure d'équation aux valeurs propres $(-\rho_o \omega^2)$; ces valeurs de ω sont les fréquences propres du plasma MHD tandis que les fonctions $\vec{\xi}$ associées sont les modes propres définis précédemment. La difficulté de l'étude de stabilité se mesure maintenant à la complexité de \mathfrak{F} et plus particulièrement à celle de son spectre qui peut présenter non seulement des valeurs propres discrètes mais également des continua de valeurs propres.

A.5 Analyse en temps des modes propres

Les fréquences propres ω_α déterminées par la résolution de (A.6) ou (A.7) appartiennent au corps des complexes, nous allons les écrire comme : $\omega_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha + i\gamma_\alpha$ où $\tilde{\omega}_\alpha, \gamma_\alpha \in \mathbb{R}$. Les mode propres s'écrivent alors :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, \omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t} = \vec{\xi}(\vec{r}, \omega_\alpha) e^{\gamma_\alpha t} e^{-i\tilde{\omega}_\alpha t}.$$

Le terme $e^{-i\tilde{\omega}_\alpha t}$ décrit la partie oscillante du mode propre, mais suivant le signe de γ_α il est évident que son comportement est radicalement différent. Lorsque la partie imaginaire de ω_α est négative le mode est amorti — voire sur-amorti quand $\tilde{\omega}_\alpha$ est nul — en revanche, dans les cas où $\mathcal{I}m(\omega_\alpha)$ est positive, le mode est exponentiellement divergent : il est instable. Si en outre la partie réelle de la fréquence propre n'est pas nulle lorsque le mode est instable, on parle de surstabilité ; au cours du temps, il diverge tout en oscillant. Quant à la stabilité marginale, elle se traduit mathématiquement par $\gamma_\alpha = 0$.

Dans ce type d'analyse, rien ne définit a priori l'amplitude $\vec{\xi}$ de chaque mode propre. Elle est déterminée par le comportement de la source d'énergie qui provoque les fluctuations. Pour en tenir compte il faut traiter la relation (A.4) dans sa globalité, en conservant le terme source qui alimente les perturbations en énergie (au moins initialement).

A.6 Analyse spatiale des modes propres

Nous avons montré que l'analyse de la stabilité d'un plasma en mode propre conduit à s'intéresser aux caractéristiques de l'opérateur \mathcal{L} donné en (A.4) ou plus particulièrement au spectre de la densité de force dans le cas, que nous considérons ici, d'équilibres MHD purs.

Dans la mesure où le contexte le permet, la décomposition des perturbations — le vecteur déplacement en l'occurrence — sur des modes de Fourier spatiaux, permet en pratique de simplifier considérablement le traitement de la stabilité. Nous définissons la transformée de Fourier de $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ donné sur tout l'espace \mathbb{R}^3 , par :

$$\vec{\xi}(\vec{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\xi}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r},$$

et la transformation inverse telle que :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\xi}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{k},$$

où le vecteur d'onde \vec{k} est réel — contrairement à la transformation de Laplace où ω est complexe.

A.6.1 En milieu homogène

Dans une première approche nous allons supposer que le milieu est infini et homogène, et par conséquent que l'opérateur \mathfrak{L} l'est également. Cette hypothèse permet de relaxer les contraintes dues aux conditions aux limites.

De même que précédemment nous avons remplacé $\vec{\xi}$ par sa transformée de Laplace temporelle inverse dans la relation (A.6), nous allons maintenant le faire avec son intégrale de Fourier inverse. La combinaison des intégrales de Laplace et de Fourier montre que résoudre les équations linéaires de la MHD revient à calculer :

$$\mathfrak{L}(i\vec{k}, i\omega) \vec{\xi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Cette manipulation consiste en définitive à développer un champ de perturbation sur une base d'ondes planes, puis à étudier la stabilité de chacun de ces modes. Comme nous l'avons vu plus haut, la résolution de (A.8) détermine les fréquences propres du plasma, mais dans le formalisme présent ces valeurs ω_α sont étroitement liées aux valeurs de \vec{k} , et toutes les valeurs de \vec{k} et ω possibles ne conduisent pas à des modes propres susceptibles de se développer dans le plasma. La relation (A.8) est appelée une équation de dispersion, elle fixe la dépendance entre la fréquence et la longueur d'onde ($\lambda = \|\vec{k}\|/2\pi$) des modes pouvant exister. La recherche des ondes MHD caractéristiques d'un plasma homogène, faite dans la section II-2.1, constitue un exemple de ce type de développement. En l'occurrence les trois formes de mode obtenues sont stables.

Puisque les équations constitutives de \mathfrak{L} sont linéaires, en théorie nous pouvons connaître la réponse du plasma à une perturbation générale composée de l'ensemble des modes propres du plasma, si nous connaissons sa réaction vis-à-vis de chacun de ces modes. En particulier la stabilité du système n'est assurée que dans la mesure où toutes les longueurs d'ondes *i.e.* toutes les fréquences sont stables ; une seule onde instable permet de conclure à l'instabilité de milieu. En pratique la relation (A.8) est formellement une équation matricielle, dans laquelle nous

pouvons introduire à droite un terme source, $\vec{S}(\vec{k}, \omega)$, à l'origine des fluctuations. Son inversion et son intégration de Fourier inverse permettent de déterminer le champ de fluctuation à partir du spectre des sollicitations externes et des caractéristiques du milieu par :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{L}^{-1}(\vec{k}, \omega) \vec{S}(\vec{k}, \omega).$$

La matrice \mathcal{L}^{-1} est l'inverse de \mathcal{L} . Elle est factorisée par l'inverse du déterminant de \mathcal{L} qui s'annule pour chaque fréquence propre, en raison de quoi le calcul de l'intégrale ci-dessus nécessite un traitement approprié des pôles de \mathcal{L}^{-1} (Balescu, 1963).

A.6.2 Approximation WKB

Le cadre d'un plasma homogène permet d'aborder indifféremment les modes propres de toutes longueurs d'ondes, mais un problème se pose lorsque l'on doit traiter de milieux présentant des hétérogénéités. L'opérateur linéaire de la relation (A.8) montre alors une dépendance spatiale, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\vec{r}, i\vec{k}, i\omega)$; il devient nécessaire de formuler une hypothèse supplémentaire pour examiner l'équation de dispersion en termes d'ondes planes. Lorsque la problématique l'autorise, on se place dans le cadre de l'approximation WKB² qui restreint le domaine des modes que nous pouvons considérer, à ceux pourvus d'une longueur d'onde très petite devant les échelles caractéristiques des hétérogénéités du plasma. On effectue un développement limité des grandeurs d'équilibre autour d'une position \vec{r}_0 quelconque puis on considère,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \ln X_0(\vec{r}_0) \ll \vec{k}, \quad (\text{A.9})$$

afin d'effacer artificiellement dans \mathcal{L} les variations spatiales des quantités stationnaires X_0 .

L'analyse de modes effectuée dans l'approximation WKB, qui devient une analyse locale, gagne beaucoup en simplicité mais en revanche n'est plus exhaustive. Elle n'est valide que dans le proche voisinage de \vec{r}_0 et dans la mesure où (A.9) s'y applique mais ne dit rien sur le comportement à grande échelle du plasma. Le milieu est souvent localement instable sans que sa structure complète ne s'en trouve affectée. A contrario une instabilité globale conduit bien entendu toujours à une instabilité locale.

A.6.3 Modes globaux

Du fait de son manque de généralité, il est évidemment courant que l'on ne puisse se contenter d'une étude de la stabilité d'un plasma dans l'approximation WKB ; soit parce que les modes potentiellement pertinents ont des variations spatiales non négligeables devant celles de la structure d'équilibre, soit simplement parce que l'on ne se contente pas de la connaissance des propriétés de stabilité à petite échelle spatiale mais que l'on souhaite également préciser le comportement du milieu en réponse à des perturbations de grande étendue. Il faut alors traiter complètement le problème de la stabilité linéaire ; on est donc contraint de passer à

2. Acronyme de Wentzel, Kramers et Brillouin.

une étude globale de stabilité, c'est-à-dire de considérer le milieu fluide dans sa totalité et par conséquent de tenir compte des conditions physiques aux limites du système — à l'inverse de l'approximation WKB. Les études en modes globaux sont très complètes car elles donnent à la fois des informations sur la stabilité du milieu dans son ensemble mais aussi sur sa stabilité locale.

Toutefois, dans les études que nous menons, les plasmas considérés présentent souvent une, voire deux directions d'invariances. Il est donc astucieux de se placer dans le système de coordonnées permettant de tirer partie de ces propriétés de symétrie. En effet, suivant les directions d'invariance il devient à nouveau possible d'utiliser le formalisme de la transformation de Fourier et ainsi de décomposer un champ de perturbations $\vec{\xi}$ sur une base d'ondes planes dont l'amplitude varie spatialement de la même façon que le plasma d'équilibre. La relation (A.6) prend la forme d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on peut chercher à traiter comme un problème dit de Sturm-Liouville, en imposant des conditions aux limites. À titre d'exemple, dans le cas d'un milieu stratifié suivant z , les modes propres à considérer doivent être de la forme,

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\xi}(k_x, k_y, z, t) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y.$$

La résolution, souvent difficile, du problème de Sturm-Liouville découlant d'une étude globale détermine une infinité de fréquences propres discrétisées par les conditions aux limites.

L'opérateur linéaire stationnaire \mathfrak{F} défini par (A.7) représente la densité de force dans le plasma lorsqu'on l'applique au vecteur déplacement. En MHD idéale cet opérateur possède certaines propriétés mathématiques, détaillées par Freidberg (1987), qui ouvrent d'intéressantes voies d'investigations sur la stabilité dont en particulier un principe variationnel. Nous allons à présent énumérer ces différentes propriétés qui restent d'ordre général et ne dérivent d'aucune hypothèse a priori sur le plasma.

A.6.4 \mathfrak{F} est auto-adjoint

La caractéristique majeure de l'opérateur est d'être auto-adjoint, ce qui signifie que pour tous vecteurs arbitraires $\vec{\xi}$ et $\vec{\zeta}$ nous avons :

$$\int_V \vec{\zeta} \cdot \mathfrak{F} \cdot \vec{\xi} d^3\vec{r} = \int_V \vec{\xi} \cdot \mathfrak{F} \cdot \vec{\zeta} d^3\vec{r}, \quad (\text{A.10})$$

où les intégrations portent sur tout le volume du plasma. La longue démonstration de cette égalité est détaillée entre autres par Kadomtsev (1963). Cette relation ainsi que (A.7) permettent immédiatement de conclure que les valeurs propres ω_α^2 sont purement réelles car :

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\alpha^{*2}) \int_V \rho |\xi_\alpha|^2 d^3\vec{r} = \int_V \left(\vec{\xi}_\alpha^* \cdot \mathfrak{F} \cdot \vec{\xi}_\alpha - \vec{\xi}_\alpha \cdot \mathfrak{F} \cdot \vec{\xi}_\alpha^* \right) d^3\vec{r} = 0,$$

et puisque \mathfrak{F} est à coefficients réels, le déplacement $\vec{\xi}_\alpha$ est lui-même réel pur. Il est important de souligner ce résultat sur la nature de ω_α^2 ; il implique que les modes avec $\omega_\alpha^2 > 0$ (i.e. $\omega \in \mathbb{R}$)

sont simplement oscillants et donc stables mais lorsque $\omega_\alpha^2 < 0$, il existe une branche de solutions exponentiellement instables, sans partie oscillante. Dans les plasmas MHD idéaux, il n'existe donc pas de mode surstable ; les modes propres sont soit oscillants, soit instables ou suramortis.

En toute généralité la transition entre stabilité et instabilité se fait lorsque les modes vérifient $\gamma_\alpha = \mathcal{I}m(\omega_\alpha) = 0$ et $\tilde{\omega}_\alpha = \mathcal{R}e(\omega_\alpha) \neq 0$. Ceci rend plus difficile la détermination du régime de stabilité marginale car il faut non seulement évaluer γ_α mais également $\tilde{\omega}_\alpha$. En revanche, en MHD idéale il est évident que $\omega_\alpha^2 = 0$ — les parties réelle et imaginaire doivent être simultanément nulles — dessine la frontière entre stabilité et instabilité.

A.6.5 Forme du spectre de \mathfrak{F}

Les caractéristiques spectrales de \mathfrak{F} découlent de l'étude mathématique de l'opérateur $\mathfrak{L}^{-1} \equiv (\mathfrak{F} + \rho_o \omega^2)^{-1}$, de l'étude de son existence en particulier. Dans un problème aux valeurs initiales traité au moyen des transformations de Laplace, posé dans la relation (A.4), les valeurs de ω interdisant l'inversion de \mathfrak{L} composent le spectre de cet opérateur. En dehors du spectre, nous pouvons inverser (A.4) :

$$\vec{\xi}(\vec{r}, \omega) = \mathfrak{L}^{-1}(\vec{r}, \omega) \cdot \vec{S}(\vec{r}, \omega).$$

Les valeurs propres du spectre de \mathfrak{L} peuvent être de deux natures différentes. D'une part elles peuvent composer un spectre discret obtenu lorsque la résolution de $\mathfrak{L} \cdot \vec{\xi} = 0$ conduit à une solution autre que la solution triviale. Ce sont les modes propres mentionnés en A.6.3 et déterminés par un traitement des modes globaux. D'autre part, les valeurs propres ω^2 peuvent former des continua dans \mathbb{R} sur les surfaces du plasma où l'opérateur \mathfrak{L}^{-1} présente une singularité — i.e. dans les régions où \mathfrak{L} s'annule. Jusque dans les années quatre-vingts les différentes recherches menées sur \mathfrak{L} n'ont jamais montré l'existence d'une distribution continue de fréquences propres dans la partie instable du spectre. Mais depuis, les travaux de Dewar & Glasser (1983) entre autres, ont montré l'existence de tels continua de modes instables ; le traitement de la stabilité MHD s'en retrouve évidemment plus difficile.

A.7 Principe de minimisation de l'énergie

Une méthode alternative à l'analyse spatiale des modes consiste à faire un bilan énergétique du plasma dans sa globalité puis à appliquer un théorème qui montre qu'un système instable tend à augmenter son énergie cinétique au détriment de son énergie potentielle. Cette méthode permet d'obtenir relativement simplement et de façon très précise des informations sur la stabilité ou non d'un plasma pour des modes de perturbation — appelés fonctions tests — jugés pertinents. Contrairement aux méthodes d'analyse des modes globaux, le Principe d'Énergie ne nécessite plus de calculer exactement la forme des modes instables, mais en revanche, le cas échéant, il ne dispense qu'une information approximative du taux de croissance d'une instabilité.

A.7.1 Formulation variationnelle

Bernstein *et al.* (1958) ont montré que le fait d'avoir \mathfrak{F} auto-adjoint permet de définir, pour tout système MHD, un principe variationnel, donc intégral, strictement équivalent aux trois équations linéaires couplées synthétisées dans (A.7) — que nous détaillons en annexe B. Cela signifie qu'il existe une fonctionnelle du vecteur déplacement que l'on peut minimiser ou maximiser afin de retrouver la formulation locale de la MHD ; en outre, ces extrema, égaux aux fréquences propres, sont obtenus lorsque le déplacement est un mode propre du plasma.

Le produit scalaire de (A.7) par le conjugué complexe du déplacement — $\vec{\xi}$ est supposé complexe pour permettre des développements de Fourier — donne directement ce principe variationnel que nous écrivons comme :

$$\omega^2 = \frac{\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*)}{K(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*)} \quad \text{où,} \quad (\text{A.11})$$

$$\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*) = -\frac{1}{2} \int_V \vec{\xi}^* \cdot \mathfrak{F} \cdot \vec{\xi} d^3\vec{r} \quad \text{et} \quad (\text{A.12})$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*) = \frac{1}{2} \int_V \rho_b |\xi|^2 d^3\vec{r}. \quad (\text{A.13})$$

La quantité δW représente la variation d'énergie potentielle produite par les fluctuations évoluant au sein du système ; elle est égale au travail fourni par la force $\mathcal{F} \cdot \vec{\xi}$ lors du déplacement du plasma d'une quantité $\vec{\xi}$. L'intégrale K est, quant à elle, proportionnelle à l'énergie cinétique du milieu.

Les intégrales (A.12) et (A.13) couvrent la totalité de l'espace occupé par le plasma et ainsi les bornes d'intégration reflètent les conditions à ses limites. Les extrema de (A.11) relativement à $\vec{\xi}$ déterminent a priori exactement l'évolution temporelle des modes propres du plasma ; toutefois, cette relation ne sera pas utilisée dans le but de les calculer mais plutôt pour déterminer par le Principe d'Énergie si une famille de modes vérifiant les conditions aux limites adéquates conduisent ou non à une instabilité.

A.7.2 Principe d'Énergie

Il est parfois intéressant de déterminer si un système est stable ou instable sans pour autant souhaiter une très grande précision sur le calcul des taux de croissance d'instabilité, mais en se contentant de leur estimation. Ce type d'approche est par exemple d'un grand intérêt dans le domaine de la fusion où les temps caractéristiques d'instabilité sont beaucoup plus courts que les échelles de temps des expérimentations. En pratique, dans ce contexte, l'intérêt est moins de caractériser l'instabilité que de la prévenir afin de garantir la stabilité du tore de plasma. En effet, la virulence des instabilités MHD conduit quasi-inévitablement à la destruction du confinement.

Le principe variationnel décrit ci-dessus se simplifie par des considérations physiques pour donner un très puissant critère de minimisation, appelé Principe d'Énergie, qui détermine de façon exacte les limites de stabilité tout en approximant les taux de croissance. Outre sa puissance, cette méthode apparaît également très intuitive car elle permet de décomposer assez naturellement les différents termes contribuant à la variation d'énergie du plasma et contribue ainsi à détailler explicitement les différents effets physiques.

Le principe énoncé par Bernstein *et al.* (1958) suppose un plasma MHD idéal dont l'énergie reste strictement constante. En conséquence de quoi, on peut établir que l'extremum correspondant à la valeur la plus négative de ω^2 (i.e. la plus instable) doit s'obtenir lorsque l'énergie potentielle du milieu est minimale. Cela implique alors que la question de la stabilité se pose en terme d'analyse du signe de la variation d'énergie potentielle δW mais davantage à travers le principe variationnel plus général (A.11). La condition nécessaire et suffisante de stabilité du plasma est d'avoir :

$$\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*) \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

pour toute forme de perturbation possible — c'est-à-dire à énergie finie et répondant aux conditions aux limites — et où δW est donné par (A.12). Lorsque le système ne peut évoluer qu'en accroissant son énergie potentielle il est donc stable, mais s'il existe la moindre « fonction d'essai » conduisant à une décroissance de δW le milieu est alors instable, au moins pour cette famille de fonctions. En pratique, si l'on intuite une famille de fonctions comme potentiellement instable, on regarde si elle rend effectivement δW négatif et, le cas échéant, (A.11) nous donne une valeur maximale de ω^2 — i.e. plus stable que le véritable mode propre.

A.7.3 Principe d'Énergie Généralisé

Les démonstrations de Laval *et al.* (1965) puis de Spies (1974) viennent compléter les lacunes de la démonstration initiale et donnent ainsi une assise mathématique au Principe d'Énergie. Toutefois, ce principe est en particulier valable dans les deux cas de figures suivants : soit lorsque le plasma est confiné par une paroi conductrice ou rigide — auquel cas le déplacement reste parallèle à cette surface — soit, configuration plus pertinente, lorsque l'espace entourant le plasma est vide. Mais, contrairement à la première possibilité d'application du Principe, très directe, la seconde conduit à des difficultés dans la façon d'exprimer simplement le couplage entre le plasma MHD et le champ magnétique du vide puis d'intuiter les fonctions d'essais idoines. Pour ces raisons Bernstein *et al.* (1958) ont établi un Principe d'Énergie Généralisé en reformulant δW . À partir de la définition (A.12) de δW , de celle de la force $\mathfrak{F} \cdot \vec{\xi}$ calculée par les relations [B.16-B.18], Freidberg (1987) et Bateman (1980) entre autres, dérivent le Principe Généralisé qui décrit δW comme :

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V \quad \text{où}$$

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P d^3\vec{r} \left[\frac{|\delta\vec{B}|^2}{\mu} - \vec{\xi}_\perp^* \cdot (\vec{j}_o \times \vec{B}_o) + \gamma P_o |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2 + (\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla P_o) \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp^* \right], \quad (\text{A.15})$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_S d^2\vec{S} \cdot \left[\nabla \left(P_o + \frac{\vec{B}_o^2}{2\mu} \right) \right] |\vec{n} \cdot \vec{\xi}_\perp^*|^2 \text{ et} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \int_V d^3\vec{r} \frac{|\delta\vec{B}|^2}{\mu}, \quad (\text{A.17})$$

avec $\vec{\xi}_\perp$ perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. Les domaines d'intégrations P , S et V correspondent respectivement au volume du plasma, à la surface qui l'entoure puis au volume de l'espace vide qui le cerne, tous trois non perturbés. L'intégrale (A.15) est l'écriture standard de l'énergie du plasma tandis que les deux suivantes montrent les effets de la frontière. Dans la seconde intégrale, (A.16), $[A]$ représente le saut de la quantité A au travers de la surface du plasma, dont \vec{n} définit la normale sortante. Cette relation qui traduit le saut de pression au passage de la frontière de la matière reste identiquement nulle dans la mesure où l'interface n'est pas sujette à des courants de surface. La troisième relation, (A.17), montre simplement les variations de l'énergie magnétique dans le vide entourant le plasma. Pour être exhaustif, nous devons ajouter aux équations [A.15-A.17], les caractéristiques du champ magnétique du vide, à savoir l'absence de courant ($\nabla \times \delta\vec{B} = 0$), la conservation du flux ($\nabla \cdot \delta\vec{B} = 0$), son comportement limite ou sur une surface extérieure puis sa continuité à travers la frontière du plasma,

$$\vec{n} \cdot \delta\vec{B}_{\text{ext.}}|_S = \delta\vec{B}_{\text{int.}} \cdot \nabla (\vec{n} \cdot \vec{\xi}_\perp) - (\vec{n} \cdot \vec{\xi}_\perp) \left[\vec{n} \cdot (\nabla \delta\vec{B}_{\text{int.}}) \right] \Big|_S.$$

L'ensemble des équations précédentes permet en théorie de résoudre exactement, et pour toute géométrie de champ magnétique, le problème de la stabilité linéaire d'un plasma. D'après [A.15-A.17] nous voyons deux types distincts d'instabilités : celles où l'interface entre le plasma et le vide reste immobile, appelées instabilités internes — ou à frontière fixe — et celles pour lesquelles la frontière se déplace par rapport à sa position d'équilibre qui sont appelées instabilités externes — ou à frontière libre. En pratique les études de stabilité vont porter principalement sur l'évaluation du signe de δW_F , c'est pourquoi Furth *et al.* (1965) donnent une formulation plus intuitive de l'énergie totale du plasma avec une meilleure lisibilité des différents effets physiques :

$$\delta W_F = \frac{1}{2} \int_P d^3\vec{r} \left[\underbrace{\frac{|\delta\vec{B}_\perp|^2}{\mu}}_{\text{Alfvén}} + \underbrace{\frac{B_o}{2\mu} |\nabla \cdot \vec{\xi}_\perp + 2 \vec{\xi}_\perp \cdot \vec{\kappa}_c|^2}_{\text{magnéto-sonore}} + \underbrace{\gamma P_o |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2}_{\text{sonore}} \right. \\ \left. - 2 \underbrace{(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla P_o) (\vec{\kappa}_c \cdot \vec{\xi}_\perp^*)}_{\text{interchange - ballooning}} - \underbrace{j_{o\parallel} (\vec{\xi}_\perp^* \times \vec{e}_\parallel) \cdot \delta\vec{B}_\perp}_{\text{kink}} \right], \quad (\text{A.18})$$

où \vec{e}_\parallel est le vecteur unitaire parallèle aux lignes de champ magnétique et où leur courbure est caractérisée par $\vec{\kappa}_c = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel$.

A.7.4 Interprétation physique

Les différents termes de (A.18) sont aisément interprétables. Le premier, en $\delta\vec{B}_\perp$, produit par la torsion des lignes de champ magnétique est associé aux ondes d'Alfvén, le second terme représente l'énergie produite par la compression des tubes de flux magnétique et est associé aux ébranlements magnéto-soniques, quant au terme en $\gamma P_o \left| \nabla \cdot \vec{\xi} \right|^2$, il correspond à l'énergie nécessaire à la compression du plasma. Ces trois contributions, alfvénique, magnéto-sonore et sonore, sont strictement positives et tendent à accroître l'énergie potentielle du milieu ; elles pompent de l'énergie aux perturbations pour la restituer au plasma MHD. Il est donc clair que de façon générale la torsion des lignes de champ magnétique ainsi que la compression du plasma contribuent à sa stabilisation en absorbant une partie de l'énergie cinétique disponible dans les fluctuations de la matière.

En revanche, les deux termes suivants de (A.18) peuvent être positifs ou négatifs et ainsi conduire à des instabilités. Le premier est contrôlé par la courbure de \vec{B}_o et le gradient de pression transverse — lui même contrôlé par le courant perpendiculaire : $\nabla P_o = \vec{j}_{o\perp} \times \vec{B}_o$. Il est à l'origine de mécanismes instables, pilotés par la pression, de type interchange tels que le ballooning étudié dans la partie II. La seconde contribution pouvant déstabiliser le plasma est proportionnelle au courant parallèle circulant dans la structure d'équilibre. La capacité de ce mécanisme à entortiller les tubes de flux magnétique lui vaut le nom d'instabilité de « kink ». Cette analyse de l'énergie potentielle détermine les seules instabilités internes auxquelles peuvent être sujets les plasmas MHD et il en découle que les courants responsables de la structure d'équilibre du milieu sont potentiellement à l'origine des processus déstabilisants.

Pour un champ de perturbations quelconque, Freidberg (1987) montre trivialement que l'énergie potentielle de la matière est minimale relativement aux variations de la composante ξ_\parallel du déplacement — donc dans l'absolu, car dans le processus de minimisation le plus général $\vec{\xi}_\perp$ et ξ_\parallel varient indépendamment — lorsque les fluctuations évoluent de manière incompressible. En revanche ce n'est plus vrai si l'on traite une sous-classe de perturbations. La relation (A.18) indique que $\nabla \cdot \vec{\xi} \neq 0$ est stabilisant car cette divergence intervient comme le carré d'un module, mais on voit ici en outre que les perturbations les plus instables vérifient nécessairement $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$. Il convient toutefois de souligner que la minimisation de δW se fait vis-à-vis du déplacement et non par rapport à sa divergence. En effet, nous avons :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0 \iff \vec{B}_o \cdot \nabla \left(\frac{\xi_\parallel}{B_o} \right) = -\nabla_\perp \cdot \vec{\xi}_\perp$$

et la conclusion sur l'incompressibilité n'a donc de sens que dans la mesure où l'opérateur $\vec{B}_o \cdot \nabla$ n'est pas singulier — situation exceptionnelle, hormis dans quelques géométries de champ magnétique à symétrie particulière. Cet opérateur peut ne pas s'inverser sur certaines surfaces isolées du plasma, appelées surfaces de résonance, mais il est toujours possible de construire par continuité une composante ξ_\parallel qui induit une compression nulle.

Les propriétés énoncées ci-dessus sont établies pour un plasma MHD idéal soumis aux seules forces de pression thermique et de Lorentz, ce qui fait de \mathfrak{F} un opérateur auto-adjoint.

Lorsque l'opérateur force perd cette caractéristique, en présence d'un champ de gravité par exemple, le principe d'énergie et les propriétés qui en découlent ne s'appliquent plus et l'on est contraint de revenir à des méthodes plus lourdes de traitement des modes globaux.

Annexe B

Expression générale des équations linéarisées de la MHD

Sommaire

B.1	Influence d'un champ de vitesse à l'équilibre	215
B.2	Réduction du système MHD en fonction du déplacement	223

B.1 Influence d'un équilibre en mouvement sur la linéarisation des équations de la MHD.

B.1.1 Formalisme lagrangien

Dans cette première partie de l'annexe nous souhaitons généraliser les calculs présentés dans les sections 2.1 et 2.2 ; nous allons montrer qu'en présence d'un mouvement du plasma à l'équilibre les équations de continuité, d'induction et d'état se ramènent respectivement aux relations (2.15), (2.16) et (2.17) établies pour un milieu immobile. Pour cela nous allons

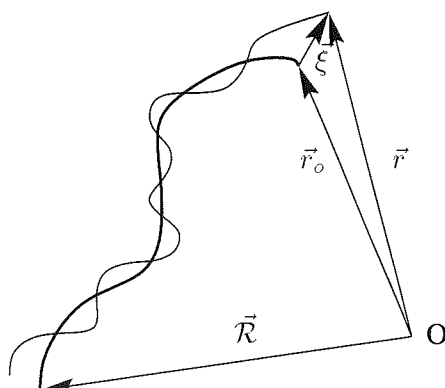


FIG. B.1 – Trajectoires fluides, d'équilibre et perturbée.

utiliser temporairement un formalisme lagrangien c'est-à-dire que nous allons déterminer

l'évolution temporelle de grandeurs physiques telles que la densité ou le champ magnétique au cours du déplacement de la matière suivant les lignes de courant. Le schéma suivi est celui présenté sur la figure B.1 .

La position \vec{r} d'un élément fluide à un instant t est donnée par :

$$\vec{r}(\vec{r}_o, t) = \vec{r}_o + \vec{\xi}(\vec{r}_o, t), \quad (\text{B.1})$$

où \vec{r}_o est la position qu'aurait cet élément fluide non perturbé et $\vec{\xi}$ son déplacement infinitésimal par rapport à cette position, dépendant de \vec{r}_o et du temps t . D'un autre point de vue, nous pouvons aussi considérer que suivant une ligne de courant de matière fixée, la position n'est pas une variable indépendante mais dépend de la variable temps, soit :

$$\begin{aligned} \vec{r}_o \equiv \vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t) \quad \text{et donc} \quad \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t) &= \vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t) + \vec{\xi}(\vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t), t) \\ &= \vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t) + \vec{\xi}(\vec{\mathcal{R}}, t), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où $\vec{\mathcal{R}} \equiv \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t = 0)$ référence chaque ligne de courant de matière à travers la position initiale de l'élément de volume qui va la suivre au cours de l'évolution temporelle.

Dans un souci de lisibilité, lorsque la différenciation des lignes de courant n'est pas importante, nous omettons la variable $\vec{\mathcal{R}}$. De plus, nous soulignerons les grandeurs physiques lorsque nous considérerons leur écriture lagrangienne $\underline{X}(\vec{\mathcal{R}}, t)$ plutôt que leur écriture eulérienne $X(\vec{r}, t)$. Nous noterons également l'opérateur de dérivation temporelle qui suit le mouvement de la matière, communément appelé "dérivation lagrangienne", comme

$$\frac{D}{Dt} X(\vec{r}(t), t) = \frac{d}{dt} \underline{X}(t) = \frac{\partial}{\partial t} X(\vec{r}(t), t) + (\vec{v}(t) \cdot \nabla) X,$$

où nous avons délibérément omis d'indicer les lignes de courant. Dans le traitement des dérivations spatiales, nous introduirons, en outre, les opérateurs ∇_r , ∇_{r_o} et $\nabla_{\mathcal{R}}$ qui calculent les dérivées respectivement suivant les variables \vec{r} , \vec{r}_o et $\vec{\mathcal{R}}$.

Pour une grandeur physique quelconque X , il devient clair en effectuant un développement limité trivial que la condition, nécessaire à la linéarisation, d'avoir une perturbation petite devant l'ordre 0 — $\varepsilon \sim \xi/r \sim \delta X/X_o \ll 1$ — impose qu'à notre niveau d'approximation nous pouvons évaluer indifféremment δX en \vec{r} ou en \vec{r}_o :

$$\delta X(\vec{r}) = \delta X(\vec{r}_o) + o(\varepsilon^2).$$

En revanche, cela n'est bien entendu pas vrai pour l'ordre zéro : $X(\vec{r}) = X(\vec{r}_o) + o(\varepsilon)$.

B.1.2 Expression de la fluctuation de vitesse

Par définition de la vitesse d'un élément fluide et de sa perturbation nous avons,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) \equiv \vec{v}_o(\vec{r}, t) + \delta \vec{v}(\vec{r}, t),$$

où \vec{r} est donnée par la relation (B.1). Un développement limité de \vec{v}_0 au premier ordre et au voisinage de \vec{r}_0 , donne :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}_0, t) + \left(\vec{\xi}(\vec{r}_0, t) \cdot \nabla \right) \vec{v}_0(\vec{r}_0, t) + \delta \vec{v}(\vec{r}_0, t). \quad (\text{B.3})$$

D'autre part, si nous partons de la définition de la vitesse,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) \equiv \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}_0(t) + \frac{D}{Dt} \vec{\xi}(\vec{r}_0(t), t),$$

nous pouvons établir directement :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}_0, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\xi}(\vec{r}_0, t) + (\vec{v}_0(\vec{r}_0, t) \cdot \nabla) \vec{\xi}(\vec{r}_0, t). \quad (\text{B.4})$$

D'où, en combinant (B.3) et (B.4), nous déduisons simplement la fluctuation de vitesse en tout point \vec{r} de l'espace et à tout instant :

$$\delta \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\xi}(\vec{r}, t) + (\vec{v}_0(\vec{r}, t) \cdot \nabla) \vec{\xi}(\vec{r}, t) - \left(\vec{\xi}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \right) \vec{v}_0(\vec{r}, t). \quad (\text{B.5})$$

B.1.3 L'équation de continuité

Approche formelle

En présence d'un champ de vitesse non uniforme, noté \vec{v}_0 , la linéarisation de l'équation de continuité 2.1 — dont les principes ont été établis en annexe A — ne conduit pas, bien évidemment, à la relation 2.5, mais introduit un terme supplémentaire lié à la compression ou à la dilatation de la matière dans ce champ de vitesse localement convergent ou divergent. Une fois linéarisée, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\delta \rho \vec{v}_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}) = 0$$

où, en développant la première divergence, nous faisons apparaître l'opérateur de dérivation lagrangienne appliqué à $\delta \rho$:

$$\frac{D \delta \rho}{Dt} + \delta \rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}) = 0,$$

puis nous remplaçons $\delta \vec{v}$ par son expression (B.5) pour aboutir à

$$\frac{D \delta \rho}{Dt} + \delta \rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \left(\rho_0 (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{\xi} \right) - \nabla \cdot \left(\rho_0 (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right) = 0.$$

L'étape suivante consiste à faire apparaître le terme $\rho_0 \vec{\xi}$ dans chaque divergence pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \frac{D \delta \rho}{Dt} + \delta \rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \nabla \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \vec{\xi}) - \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \vec{\xi} \right] \\ + \nabla \cdot \left[(\vec{v}_0 \cdot \nabla) (\rho_0 \vec{\xi}) - (\vec{v}_0 \cdot \nabla \rho_0) \vec{\xi} \right] - \nabla \cdot \left[(\rho_0 \vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] = 0, \end{aligned}$$

que nous pouvons récrire comme :

$$\begin{aligned} \frac{D\delta\rho}{Dt} + \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 \right) \vec{\xi} \right] \\ + \nabla \cdot \left[(\vec{v}_0 \cdot \nabla) (\rho_0 \vec{\xi}) - (\rho_0 \vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Pour simplifier cette expression, nous allons d'une part utiliser l'équation de continuité à l'ordre 0 qui nous permet de substituer :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \rho_0 = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0.$$

D'autre part nous allons utiliser la relation suivante :

$$\nabla \cdot \left[(\vec{v}_0 \cdot \nabla) (\rho_0 \vec{\xi}) - (\rho_0 \vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] = (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) - (\rho_0 \vec{\xi} \cdot \nabla) \nabla \cdot \vec{v}_0,$$

qui se démontre simplement par le calcul de la divergence du rotationnel d'un produit vectoriel, dont le résultat est identiquement nul :

$$\nabla \cdot \left[\nabla \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \right] = 0.$$

Une fois ces intermédiaires de calculs établis, nous récrivons (B.6) comme :

$$\begin{aligned} \frac{D\delta\rho}{Dt} + \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_0 \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{v}_0 \right] \\ + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) - (\rho_0 \vec{\xi} \cdot \nabla) \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0, \end{aligned}$$

où nous pouvons reconnaître la dérivée lagrangienne de $\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi})$. Par ailleurs, en développant le quatrième terme de cette équation, nous pouvons éliminer le dernier, d'où :

$$\frac{D\delta\rho}{Dt} + \delta\rho \nabla \cdot \vec{v}_0 + \frac{D}{Dt} \left[\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0.$$

Finalement, ce calcul ramène l'équation aux dérivées partielles déterminant l'évolution de la perturbation de densité, à une équation différentielle homogène, du premier ordre et à coefficient non constant :

$$\frac{D}{Dt} \left[\delta\rho + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] + \left[\delta\rho + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \right] \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0. \quad (\text{B.7})$$

La solution analytique de cette équation s'obtient trivialement :

$$\delta\rho(\vec{r}(t), t) + \nabla \cdot \left[\rho_0(\vec{r}(t), t) \vec{\xi}(\vec{r}(t), t) \right] = \lambda \exp \left\{ - \int_0^t \nabla \cdot \vec{v}_0(\vec{r}(\tau), \tau) d\tau \right\},$$

où la valeur de la constante λ est donnée par celle du membre de gauche en $t = 0$.

Évidemment cette solution doit rester valable dans tout contexte et particulièrement dans la limite où $\delta\rho = 0$ et $\vec{\xi} = \vec{0}$; cette contrainte impose que λ et par conséquent le membre de gauche soient identiquement nuls.

Le résultat important de ce calcul est que pour un flot non perturbé quelconque, et en particulier qu'il soit à divergence nulle ou non, nous montrons que l'équation du mouvement linéarisée conduit toujours à la même expression de la fluctuation locale de densité en fonction du déplacement :

$$\delta\rho = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}). \quad (\text{B.8})$$

Approche géométrique

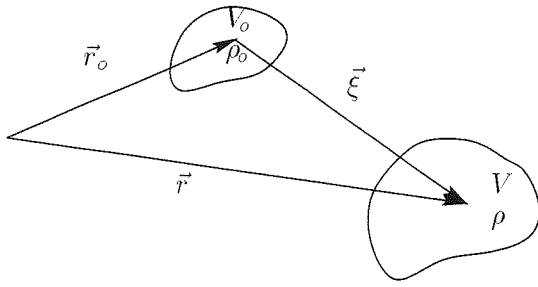


FIG. B.2 – *Perturbation d'un élément fluide.*

Dans cette partie, nous allons procéder à l'étude de l'équation de continuité en évaluant les modifications apportées à la densité d'un élément fluide entre la phase d'équilibre dynamique et la phase où l'on perturbe cet équilibre ; ainsi nous établirons certaines expressions qui s'avèreront utiles lors de l'étude de l'équation d'induction. Le concept d'élément fluide désigne un volume infinitésimal de fluide — en l'occurrence plutôt de plasma — constitué d'un très grand nombre de particules de telle façon que l'on puisse toujours

définir des grandeurs thermodynamiques locales à partir de la physique statistique. Nous considérons dans le cas présent des éléments fluides à nombre de particules constant ; par conséquent les volumes V_0 et V , respectivement de densité ρ_0 et ρ , représentés sur la figure B.2 et que l'on assimile à des composants élémentaires du plasma, doivent posséder le même nombre de particules — et avoir la même masse. Ainsi nous avons la contrainte intégrale suivante :

$$\iiint_{V_0} \rho_0(\vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 = \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \iiint_{V_0} \rho(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) |J_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0}| d^3\vec{r}_0,$$

où le passage de la seconde à la troisième intégrale se fait au moyen du changement de variable défini par la relation (B.1). Le déterminant de la matrice jacobienne associée à ce changement de variable donne le rapport de compression :

$$\rho_0(\vec{r}_0) = \rho(\vec{r}_0 + \vec{\xi}) |J_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0}|. \quad (\text{B.9})$$

Les différents termes de cette matrice sont simplement donnés par

$$J_j^i \equiv \frac{\partial r^i}{\partial r_0^j} = \underbrace{\frac{dr_0^i}{dr_0^j}}_{\delta_j^i} + \frac{\partial \xi^i}{\partial r_0^j}.$$

Dans le calcul de son déterminant, il est clair que la contribution des termes non diagonaux reste négligeable au premier ordre car ils ne vont conduire qu'à des produits de dérivées de ξ .

Par conséquent, seule va rester une partie de la trace de la matrice jacobienne, celle produite par le symbole de Kroenecker¹ δ_j^i :

$$|J_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_o}| = 1 + \nabla \cdot \vec{\xi} + o(\varepsilon^2).$$

Ainsi, au premier ordre en ε , la relation (B.9) devient :

$$\rho_o(\vec{r}_o) = \rho(\vec{r}) (1 + \nabla \cdot \vec{\xi}) = \rho(\vec{r}_o + \vec{\xi}) (1 + \nabla \cdot \vec{\xi}), \quad (\text{B.10})$$

puis, après avoir effectué un développement limité du membre de droite, toujours au premier ordre, nous aboutissons à la variation de densité :

$$\rho_o = \rho + \vec{\xi} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{\xi},$$

pour en définitive retrouver la relation (B.8) :

$$\delta \rho = \rho - \rho_o = -\nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) = -\nabla \cdot (\rho_o \vec{\xi}) \quad \text{car} \quad \rho \vec{\xi} - \rho_o \vec{\xi} = o(\varepsilon^2).$$

B.1.4 L'équation d'induction

Nous allons à présent établir une formulation linéarisée puis intégrée dans le temps de l'équation d'induction (2.3) qui décrit la manière dont le champ magnétique est transporté par le plasma. Pour cela nous allons nous reposer sur la trame proposée par Moffatt (1978). Nous considérons toujours un plasma non résistif et de fait nous ne tiendrons pas compte dans l'équation d'induction du terme produisant la diffusion du champ magnétique.

Le développement du rotationnel présent dans l'équation d'induction permet de faire apparaître l'opérateur de dérivation lagrangienne appliqué au champ magnétique :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{v}).$$

Cette formulation fait intervenir la divergence du champ de vitesse que nous pouvons évaluer à travers l'équation de continuité car elle peut s'écrire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho (\nabla \cdot \vec{v}) \implies \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}.$$

La combinaison de ces deux dernières relations conduit à :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} - \frac{\vec{B}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Après division par ρ il vient directement que l'évolution temporelle du champ magnétique est dictée par :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v}. \quad (\text{B.11})$$

1. Définition du symbole de Kroenecker : $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Équation d'évolution d'un élément de longueur

Nous allons à présent chercher la solution générale de cette équation ; de façon générique et en coordonnées lagrangiennes elle s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \vec{X}(\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(\vec{\mathcal{R}}, t) = \left(\vec{X}(\vec{\mathcal{R}}, t) \cdot \nabla_r \right) \vec{v}(\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t), t). \quad (\text{B.12})$$

La solution de cette équation va être déduite par analogie mathématique avec l'étude de l'évolution temporelle d'un élément de longueur infinitésimale $d\vec{r}$, lors de son advection par le flot. Cet élément de longueur s'écrit comme :

$$d\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t) = \left(d\vec{\mathcal{R}} \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right) \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t) = \left(d\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t=0) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right) \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t). \quad (\text{B.13})$$

Son évolution temporelle est déterminée par :

$$\frac{D}{Dt} d\vec{r} \equiv \frac{\partial}{\partial t} d\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t) = \left[d\vec{\mathcal{R}} \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t) \right),$$

où l'on a permuté les dérivées en espace et en temps. En fin de compte nous trouvons :

$$\frac{D}{Dt} d\vec{r} = \left(d\vec{\mathcal{R}} \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right) \vec{v} = (d\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{v}. \quad (\text{B.14})$$

Nous constatons donc que l'équation (B.14) portant sur un élément de longueur admet comme solution la fonction $d\vec{r}$ vérifiant (B.13). Les équations (B.12) et (B.14) sont semblables, leurs solutions doivent donc posséder des propriétés identiques. Entre autres, la solution de (B.12) doit également vérifier :

$$\vec{X}(\vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t), t) = \vec{X}(\vec{\mathcal{R}}, t) = \left(\vec{X}(\vec{\mathcal{R}}, t=0) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right) \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t).$$

Nous pouvons donc à présent appliquer ce résultat à l'équation (B.11), premièrement dans le cas d'un flot en équilibre,

$$\frac{\vec{B}_o(\vec{r}_o, t)}{\rho_o(\vec{r}_o, t)} = \left[\left(\frac{\vec{B}_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)}{\rho_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)} \right) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right] \vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t),$$

puis, deuxièmement, dans le cas d'un flot perturbé

$$\frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)} = \left[\left(\frac{\vec{B}(\vec{\mathcal{R}}, t=0)}{\rho(\vec{\mathcal{R}}, t=0)} \right) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right] \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t).$$

En utilisant la première de ces deux relations nous pouvons établir

$$\begin{aligned} \left[\frac{\vec{B}_o(\vec{r}_o, t)}{\rho_o(\vec{r}_o, t)} \cdot \nabla_{r_o} \right] \vec{r}(\vec{r}_o, t) &= \left\{ \left[\left(\frac{\vec{B}_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)}{\rho_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)} \right) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right] \vec{r}_o(\vec{\mathcal{R}}, t) \cdot \nabla_{r_o} \right\} \vec{r}(\vec{r}_o, t) \\ &= \left[\left(\frac{\vec{B}_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)}{\rho_o(\vec{\mathcal{R}}, t=0)} \right) \cdot \nabla_{\mathcal{R}} \right] \vec{r}(\vec{\mathcal{R}}, t), \end{aligned}$$

et ainsi récrire la seconde telle que

$$\frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)} = \left[\frac{\vec{B}_o(\vec{r}_o, t)}{\rho_o(\vec{r}_o, t)} \cdot \nabla_{r_o} \right] \vec{r}(\vec{r}_o, t) \implies \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\rho_o(\vec{r}_o, t)} \left(\vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \cdot \nabla_{r_o} \right) \vec{r}(\vec{r}_o, t).$$

Puis, nous considérons la relation (B.10) établie dans l'étude de l'équation de continuité et qui détermine le rapport $\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\rho_o(\vec{r}_o, t)}$, ainsi que la relation élémentaire (B.1) liant \vec{r} , \vec{r}_o et $\vec{\xi}$:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \left(1 - \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \left[\vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \cdot \nabla_{r_o} \right] \left(\vec{r}_o + \vec{\xi} \right) \\ \vec{B}(\vec{r}_o, t) + \left(\vec{\xi} \cdot \nabla_{r_o} \right) \vec{B}(\vec{r}_o, t) &= \vec{B}_o(\vec{r}_o, t) + \left(\vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \cdot \nabla_{r_o} \right) \vec{\xi} - \vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \nabla \cdot \vec{\xi} \\ \delta \vec{B}(\vec{r}_o, t) &= - \left(\vec{\xi} \cdot \nabla_{r_o} \right) \vec{B}(\vec{r}_o, t) + \left(\vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \cdot \nabla_{r_o} \right) \vec{\xi} - \vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \nabla \cdot \vec{\xi} \\ &= - \nabla_{r_o} \times \left(\vec{\xi}(\vec{r}_o, t) \times \vec{B}_o(\vec{r}_o, t) \right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité: $\nabla \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \nabla \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta} \nabla \cdot \vec{\alpha} + (\vec{\beta} \cdot \nabla) \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \nabla) \vec{\beta}$, et le fait que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

On constate donc que, dans l'approximation linéaire, la fluctuation du champ magnétique a exactement la même expression, que le plasma non perturbé soit pourvu d'un mouvement d'ensemble ou non; cette perturbation est fixée par la relation suivante, écrite sous sa forme condensée habituelle:

$$\delta \vec{B} = - \nabla \times \left(\vec{\xi} \times \vec{B}_o \right) \quad (\text{B.15})$$

B.1.5 L'équation d'état

Dans le cadre des études que nous souhaitons mener l'équation d'état ne joue qu'un rôle mineur; elle permet simplement de « fermer » le système des équations de la MHD sans avoir, a priori, d'effet significatif sur les processus physiques étudiés. C'est pourquoi nous nous contenterons d'une équation d'état polytropique de la forme:

$$P(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)^{-\gamma} = k,$$

où k est une constante — indépendante du temps et de l'espace. Suivant les valeurs prises par le coefficient γ nous pouvons caractériser différents environnements thermodynamiques. Par exemple lorsque $\gamma = 1$, nous supposons un plasma isotherme; de même si γ prend la valeur de l'indice adiabatique du milieu, nous nous plaçons dans un contexte de plasma adiabatique, isentropique.

Nous supposons donc $P\rho^{-\gamma}$ constant et homogène mais nous allons de plus faire l'hypothèse que le passage de l'état d'équilibre à l'état perturbé se fait de façon quasi-statique; cela nous permet alors d'écrire:

$$P(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)^{-\gamma} = P_o(\vec{r}_o, t) \rho_o(\vec{r}_o, t)^{-\gamma},$$

c'est-à-dire

$$P(\vec{r}, t) = P_o(\vec{r}_o, t) \left(\frac{\rho_o(\vec{r}_o, t)}{\rho(\vec{r}, t)} \right)^{-\gamma}.$$

Puis, à l'aide de la relation (B.10), et d'un développement limité de P au voisinage de \vec{r}_o nous trouvons au premier ordre :

$$P(\vec{r}_o, t) + \vec{\xi} \cdot \nabla P(\vec{r}_o, t) = P_o(\vec{r}_o, t) (1 + \nabla \cdot \vec{\xi})^{-\gamma}$$

$$P(\vec{r}_o, t) + \vec{\xi} \cdot \nabla P_o(\vec{r}_o, t) = P_o(\vec{r}_o, t) - \gamma P_o(\vec{r}_o, t) \nabla \cdot \vec{\xi}.$$

On ré-organise ensuite cette expression pour aboutir à la relation dérivée en (2.17),

$$P - P_o = \delta P = -\vec{\xi} \cdot \nabla P_o - \gamma P_o \nabla \cdot \vec{\xi}.$$

Comme pour les équations de continuité et d'induction, nous venons de montrer que l'équation d'état linéarisée prend exactement la même forme, lorsque le plasma non perturbé est soumis à un mouvement d'ensemble ou lorsqu'il reste immobile.

B.2 Réduction du système d'équations MHD en fonction du vecteur déplacement

Dans ce second volet de l'annexe, nous allons dériver les équations de la MHD pour un plasma hétérogène, tout en conservant rigoureusement l'intégralité des termes du développement linéaire, c'est-à-dire indépendamment de tout ordering présupposé. Le résultat que nous allons apporter déterminera l'évolution dans le temps du vecteur déplacement ; nous allons réduire les huit équations de la MHD portant sur $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, δP et $\delta\vec{B}$ à deux équations aux dérivées partielles, couplées, en $\vec{\xi}$. Bien entendu, la connaissance de $\vec{\xi}$ détermine de façon absolue les perturbations des grandeurs physiques que nous suivons.

B.2.1 Cadre des calculs

La combinaison des trois équations de la MHD [B.16-B.18] que nous avons dérivées dans la section précédente de cette annexe va constituer le point de départ du calcul ; elles décrivent l'évolution du vecteur déplacement défini sur la figure B.1.

Dans le calcul qui suit nous ne traitons ni les effets d'un mouvement d'ensemble du plasma à l'état d'équilibre, ni quelque contrainte que ce soit d'origine externe au milieu. Ainsi que nous l'avons vu précédemment, après leur intégration, un champ de vitesse d'équilibre ne change rien dans la prescription des équations linéarisées de continuité, d'induction et d'état. Seule l'équation du mouvement peut se trouver changée par un flot d'équilibre, de par la présence de termes liés à l'advection mais aussi à travers les conséquences du choix d'un référentiel non inertiel : forces d'inertie et de Coriolis. L'introduction de ces contributions dans le traitement qui suit reste élémentaire, c'est pourquoi nous passerons outre ; il faut

toutefois noter que ces termes peuvent introduire de nouvelles échelles spatiales caractéristiques et changent les relations entre ces échelles dynamiques. Dans la suite, l'ensemble de ces contraintes sera simplement contenu dans le terme de force par unité de masse que nous noterons $\vec{\mathcal{F}}$.

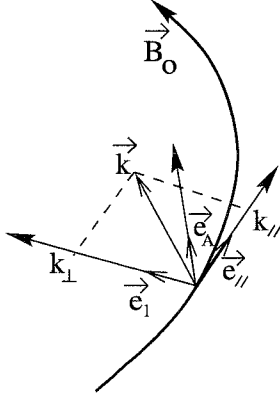


FIG. B.3 – Définition du repère local ($\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_A$).

$$\begin{aligned}\delta\vec{B} &= \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \\ &= -\vec{B}_0 \nabla \cdot \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{\xi},\end{aligned}\quad (\text{B.16})$$

$$\delta P_* = \underbrace{-\vec{\xi} \cdot \nabla P_o - \gamma P_o \nabla \cdot \vec{\xi}}_{\delta P} + \underbrace{\frac{\vec{B}_0 \cdot \delta\vec{B}}{\mu}}_{\delta P_m}, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{\mathcal{F}} + \frac{1}{\rho_o} \left(-\nabla \delta P_* + \underbrace{\frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \delta\vec{B}}{\mu} + \frac{(\delta\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}_0}{\mu}}_{\delta T} \right). \quad (\text{B.18})$$

Pour expliciter ces équations nous définissons un repère orthonormal local ($\vec{e}_\parallel, \vec{e}_\perp, \vec{e}_A$) tel que \vec{e}_\parallel est le vecteur parallèle à \vec{B}_0 au point considéré et tel que \vec{e}_\perp soit la projection perpendiculaire à \vec{B}_0 de la direction de propagation de l'onde étudiée. Le troisième vecteur unitaire du repère est, quant à lui, simplement défini par le produit vectoriel des deux premiers : $\vec{e}_A = \vec{e}_\parallel \times \vec{e}_\perp$. Ce repère est schématisé sur la figure B.3.

Dans un souci de lisibilité de cette partie très calculatoire du manuscrit, nous allons introduire différentes notations. Pour commencer, nous appellerons “s” l’abscisse curviligne suivant la ligne de champ magnétique d’équilibre et par conséquent nous écrirons l’opérateur de dérivation suivant \vec{B}_0 comme :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \partial_\parallel = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla).$$

Puis, nous considérerons la fluctuation de champ magnétique normalisée par B_o — ou réduite : $\vec{\delta} = \delta\vec{B}/B_o$.

Nous introduirons également les échelles de variations spatiales des différentes grandeurs physiques du problème, sous les formes suivantes :

- l’échelle de courbure du champ magnétique, $\vec{\mathcal{K}}_c = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel$. Par construction, ce vecteur possède une composante parallèle nulle car \vec{e}_\parallel étant unitaire, toute variation infinitésimale de ce vecteur lui est perpendiculaire : $\partial \vec{e}_\parallel \perp \vec{e}_\parallel$.
- l’échelle de variation du champ magnétique, $\vec{\mathcal{K}}_b = \nabla B_o/B_o$.
- les échelles de variation de la pression thermique, $\vec{\mathcal{K}}_p = \nabla P_o/P_o$ et de la densité de masse $\vec{\mathcal{K}}_\rho = \nabla \rho_o/\rho_o$, qui sont liées l’une à l’autre, par $\vec{\mathcal{K}}_p = \gamma \vec{\mathcal{K}}_\rho$ dans l’hypothèse d’un plasma adiabatique — dont l’équation d’état est donnée par $d(P \rho^{-\gamma}) = 0$.

- dans le cas particulier d'un milieu sans contrainte externe ni mouvement d'ensemble du plasma, l'équilibre dynamique entre la pression totale et la tension magnétique conduit à l'équation (2.10), dont nous extrayons une relation entre les différentes échelles spatiales : $\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho = (\vec{\mathcal{K}}_c - \vec{\mathcal{K}}_{b\perp})$ où $\beta = C_S^2/V_A^2$. Il apparaît clairement qu'en l'absence d'autres forces, les composantes parallèles de $\vec{\mathcal{K}}_\rho$ et de $\vec{\mathcal{K}}_p$ demeurent nulles.
- d'autre part, nous allons avoir recours ponctuellement à la composante parallèle des vecteurs $\vec{\mathcal{K}}_{\{l,A\}} = (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_{\{l,A\}}$ qui expriment les variations de $\vec{e}_{\{l,A\}}$ le long des lignes de champ.

Mais, du fait de l'orthogonalité de \vec{e}_\parallel et de $\vec{e}_{\{l,A\}}$ il découle que $\frac{\partial}{\partial s}(\vec{e}_\parallel \cdot \vec{e}_{\{l,A\}}) = 0$, d'où l'on tire l'égalité $\vec{e}_{\{l,A\}} \cdot \frac{\partial \vec{e}_\parallel}{\partial s} = -\vec{e}_\parallel \cdot \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s}$. Par conséquent, on peut simplement récrire ces vecteurs à partir du vecteur de courbure : $\vec{e}_\parallel \cdot \vec{\mathcal{K}}_{\{l,A\}} = -\vec{\mathcal{K}}_{c\{l,A\}}$.

Lorsque nous projetons l'équation du mouvement (B.18) sur les axes du repère local, nous pouvons sortir les vecteurs de base du terme de dérivation temporelle car ils sont définis à partir de l'équilibre et que, dans une étude linéaire, celui-ci ne doit pas changer dans le temps : nous pouvons ainsi exprimer les variations temporelles des trois composantes du vecteur déplacement. Pour cela, dans un premier temps nous allons calculer les expressions des composantes parallèle et perpendiculaire de la fluctuation de champ magnétique, puis les forces qui en dérivent.

B.2.2 Le champ magnétique parallèle δ_\parallel

Projetons la relation (B.16) suivant \vec{e}_\parallel puis divisons par B_o , on obtient :

$$\delta_\parallel = -\nabla \cdot \vec{\xi} - \frac{(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_o}{B_o} \cdot \vec{e}_\parallel + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial s} \cdot \vec{e}_\parallel.$$

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, toute variation élémentaire du vecteur de base \vec{e}_\parallel lui est perpendiculaire ; nous avons donc directement la relation $\frac{(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_o}{B_o} \cdot \vec{e}_\parallel = \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b$, mais également $\frac{\partial \vec{\xi}_\parallel}{\partial s} \cdot \vec{e}_\parallel = \frac{\partial \xi_\parallel}{\partial s}$, d'où,

$$\delta_\parallel = -\nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b + \frac{\partial \xi_\parallel}{\partial s} + \frac{\partial \xi_\perp}{\partial s} \cdot \vec{e}_\parallel. \quad (\text{B.19})$$

Or, si l'on considère la divergence de ξ_\parallel , on voit que la relation précédente se simplifie. En effet, à partir de l'expression de la divergence de \vec{B}_o :

$$\nabla \cdot (B_o \vec{e}_\parallel) = B_o \nabla \cdot \vec{e}_\parallel + \vec{e}_\parallel \cdot \nabla B_o = 0,$$

on déduit celle de la divergence de \vec{e}_\parallel : $\nabla \cdot \vec{e}_\parallel = -\mathcal{K}_{b\parallel}$, pour aboutir à la relation recherchée :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_\parallel}{\partial s} + \xi_\parallel \nabla \cdot \vec{e}_\parallel = \frac{\partial \xi_\parallel}{\partial s} - \xi_\parallel \mathcal{K}_{b\parallel}. \quad (\text{B.20})$$

En définitive pour la divergence du vecteur déplacement, nous trouvons :

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \xi_{\parallel} \mathcal{K}_{b_{\parallel}} + \nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp}.$$

Ainsi, la perturbation de champ magnétique parallèle devient :

$$\begin{aligned} \delta_{\parallel} &= -\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} - \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} + \xi_{\parallel} \mathcal{K}_{b_{\parallel}} - \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b + \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \cdot \vec{e}_{\parallel} \\ &= -\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} - \vec{\xi}_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{K}}_{b_{\perp}} + \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \cdot \vec{e}_{\parallel}. \end{aligned}$$

En outre, du fait de l'orthogonalité des vecteurs de bases $\{\vec{e}_{\parallel}, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}$, il découle directement que $\frac{\partial \vec{\xi}_{\{l,A\}}}{\partial s} \cdot \vec{e}_{\parallel} = \xi_{\{l,A\}} \frac{\partial \vec{e}_{\{l,A\}}}{\partial s} \cdot \vec{e}_{\parallel} = -\vec{\xi}_{\{l,A\}} \cdot \vec{\mathcal{K}}_{c_{\{l,A\}}}$, d'où

$$\delta_{\parallel} = -\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} + \xi_{\parallel} \mathcal{K}_{b_{\parallel}} - \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b - \xi_l \mathcal{K}_{c_l} - \xi_A \mathcal{K}_{c_A}, \text{ puis finalement}$$

$$\delta_{\parallel} = -\nabla \cdot \vec{\xi}_{\perp} - \left(\vec{\mathcal{K}}_{b_{\perp}} + \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \vec{\xi}_{\perp}. \quad (\text{B.21})$$

B.2.3 Le champ magnétique perpendiculaire $\vec{\delta}_{\perp}$

Dans cette section nous allons calculer la composante $\vec{\delta}_{\perp}$ de la fluctuation de champ magnétique normalisée, c'est-à-dire le vecteur $\begin{pmatrix} \delta_l \\ \delta_A \end{pmatrix}$. La projection sur les axes perpendiculaires à \vec{B}_o de l'équation (B.16) nous conduit à :

$$\vec{\delta}_{\perp} = - \left[\frac{(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_o}{B_o} \right]_{\perp} + \left[\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial s} \right]_{\perp}.$$

Le premier des deux termes de cette équation produit seulement $(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{e}_{\parallel}$ — car le terme en $\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b$ est dirigé suivant \vec{e}_{\parallel} . Les composantes perpendiculaires de la dérivée longitudinale de $\vec{\xi}$ s'écrivent comme $\left[\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial s} \right]_{\perp} = \xi_{\parallel} \frac{\partial \vec{e}_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} - \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \right) \vec{e}_{\parallel}$; nous voyons que pour ne conserver que la composante perpendiculaire de la dérivée longitudinale de $\vec{\xi}_{\perp}$ nous devons lui soustraire sa composante parallèle.

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{\perp} &= -(\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{e}_{\parallel} + \xi_{\parallel} \frac{\partial \vec{e}_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} - \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \right) \vec{e}_{\parallel} \\ &= -(\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla) \vec{e}_{\parallel} - \xi_{\parallel} \frac{\partial \vec{e}_{\parallel}}{\partial s} + \xi_{\parallel} \frac{\partial \vec{e}_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} - \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \right) \vec{e}_{\parallel} \\ &= -(\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla) \vec{e}_{\parallel} + \frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} \xi_l \vec{e}_l \\ \xi_A \vec{e}_A \end{pmatrix} - \left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \right) \vec{e}_{\parallel}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

D'une part nous pouvons récrire le dernier terme de cette équation comme :

$$\left(\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \xi_{\perp}}{\partial s} \right) \vec{e}_{\parallel} = \left[\vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} \xi_l \vec{e}_l \\ \xi_A \vec{e}_A \end{pmatrix} \right] \vec{e}_{\parallel} = \left[\vec{e}_{\parallel} \cdot \left(\xi_l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial s} + \xi_A \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} \right) \right] \vec{e}_{\parallel},$$

soit, en utilisant la propriété $\vec{e}_\parallel \cdot \frac{\partial}{\partial s} \{\vec{e}_l, \vec{e}_A\} = -\{\vec{e}_l, \vec{e}_A\} \cdot \frac{\partial \vec{e}_\parallel}{\partial s} = -\{\vec{e}_l, \vec{e}_A\} \cdot \vec{\kappa}_c$:

$$\left(\vec{e}_\parallel \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_\perp}{\partial s} \right) \vec{e}_\parallel = - \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\kappa}_c \right) \vec{e}_\parallel.$$

D'autre part nous pouvons développer la dérivation dans le second terme de la relation (B.22) de façon à obtenir pour la perturbation de champ magnétique :

$$\vec{\delta}_\perp = -(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel + \left(\frac{\partial \xi_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \vec{e}_A \right) + \left(\xi_l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial s} + \xi_A \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} \right) + \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\kappa}_c \right) \vec{e}_\parallel.$$

Pour terminer le calcul de $\vec{\delta}_\perp$ nous introduisons les opérateurs Γ^+ et Γ^- définis par :

$$\Gamma^\pm \cdot \vec{\xi}_\perp = \left(\xi_l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial s} + \xi_A \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} \right) \pm (\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel = \sum_{\alpha=\{l,A\}} \xi_\alpha [(\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\alpha \pm (\vec{e}_\alpha \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel], \quad (\text{B.23})$$

dont une interprétation géométrique est donnée en annexe C. Ce qui nous permet d'écrire finalement :

$$\vec{\delta}_\perp = \Gamma^- \cdot \vec{\xi}_\perp + \frac{\partial \xi_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \vec{e}_A + \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\kappa}_c \right) \vec{e}_\parallel = \begin{pmatrix} \Gamma_{ll}^- \xi_l + \Gamma_{lA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_l}{\partial s} \\ \Gamma_{Al}^- \xi_l + \Gamma_{AA}^- \xi_A + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

B.2.4 La force de Lorentz parallèle

Dans le calcul de l'équation du mouvement parallèle, il est plus simple de passer par la détermination de la composante parallèle de la force de Lorentz plutôt que par les expressions adéquates de la tension et de la pression magnétique. Pour cette raison nous sommes amenés à évaluer l'expression suivante :

$$\delta f_\parallel = \left(\delta \vec{j} \times \vec{B}_o + \delta \vec{B} \times \vec{j} \right) \cdot \vec{e}_\parallel,$$

dans laquelle $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}_o$ et $\delta \vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \delta \vec{B}$ sont respectivement le courant d'équilibre et sa perturbation. Or, étant donné que le produit vectoriel où intervient \vec{B}_o est nécessairement perpendiculaire à \vec{e}_\parallel , la force de Lorentz se réduit à : $\delta f_\parallel = \left(\delta \vec{B} \times \vec{j} \right) \cdot \vec{e}_\parallel$.

Évaluation du courant d'équilibre

Comme nous l'avons vu, $\vec{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}_o = \frac{1}{\mu} \nabla \times (B_o \vec{e}_\parallel)$. Nous pouvons développer le rotationnel du produit $B_o \vec{e}_\parallel$ pour trouver :

$$\vec{j} = \frac{B_o}{\mu} \left(\nabla \times \vec{e}_\parallel + \vec{\kappa}_b \times \vec{e}_\parallel \right). \quad (\text{B.25})$$

Évaluation de la force de Lorentz parallèle

En introduisant l'expression (B.25) du courant d'équilibre dans celle de la force de Lorentz évaluée au préalable nous obtenons :

$$\delta f_{\parallel} = \rho_o V_A^2 \left[(\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) \times \vec{\mathcal{B}} + \left(\vec{\mathcal{K}}_b \times \vec{e}_{\parallel} \right) \times \vec{\mathcal{B}} \right] \cdot \vec{e}_{\parallel}.$$

- Évaluation du produit mixte $\left(\vec{\mathcal{K}}_b \times \vec{e}_{\parallel} \right) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel}$:

En développant le triple produit vectoriel, on trouve

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathcal{K}}_b \times \vec{e}_{\parallel} \right) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} &= \left[\left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b \right) \vec{e}_{\parallel} - \left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} \right) \vec{\mathcal{K}}_b \right] \cdot \vec{e}_{\parallel} \\ &= \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b - \mathcal{B}_{\parallel} \cdot \mathcal{K}_{b\parallel}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \left(\vec{\mathcal{K}}_b \times \vec{e}_{\parallel} \right) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} = \vec{\mathcal{B}}_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{K}}_{b\perp}. \quad (\text{B.26})$$

- Évaluation du produit mixte $(\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel}$:

Pour réexprimer ce terme nous allons utiliser l'identité vectorielle permettant le calcul du gradient du produit scalaire de $\vec{\mathcal{B}}$ par \vec{e}_{\parallel} :

$$\nabla \left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} \right) = \vec{\mathcal{B}} \times (\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) + \vec{e}_{\parallel} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) + (\vec{e}_{\parallel} \cdot \nabla) \vec{\mathcal{B}} + \left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla \right) \vec{e}_{\parallel},$$

$$\text{dont on déduit} \quad (\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} = \left[-\nabla \mathcal{B}_{\parallel} + \vec{e}_{\parallel} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{B}}) + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial s} + \left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \nabla \right) \vec{e}_{\parallel} \right] \cdot \vec{e}_{\parallel}.$$

Il est évident que les second et quatrième vecteurs de cette expression n'ont pas de composante parallèle et que par conséquent leur produit scalaire avec \vec{e}_{\parallel} est nul d'où :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} &= -\frac{\partial \mathcal{B}_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial s} \cdot \vec{e}_{\parallel} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{B}_{\parallel}}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{B}_{\parallel}}{\partial s} + \mathcal{B}_l \vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial s} + \mathcal{B}_A \vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} \\ &= -\mathcal{B}_l \mathcal{K}_{cl} - \mathcal{B}_A \mathcal{K}_{cA}, \end{aligned}$$

$$\text{pour aboutir en définitive à} \quad (\nabla \times \vec{e}_{\parallel}) \times \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{e}_{\parallel} = -\vec{\mathcal{B}}_{\perp} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c. \quad (\text{B.27})$$

Nous recomposons ensuite l'expression mathématique de la force de Lorentz parallèle à partir des deux formules (B.26) et (B.27) que nous venons d'établir :

$$\delta f_{\parallel} = \rho_o V_A^2 \vec{\mathcal{B}}_{\perp} \cdot \left(\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} - \vec{\mathcal{K}}_c \right), \quad (\text{B.28})$$

où le champ magnétique perpendiculaire $\vec{\mathcal{B}}_{\perp}$ est donné par l'équation (B.24).

B.2.5 La force de tension magnétique perpendiculaire

Contrairement au cas de l'équation du mouvement parallèle, dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique il est plus aisé de décomposer le calcul de la force de Lorentz en ses composantes de tension et de pression.

La perturbation de tension magnétique s'écrit comme :

$$\delta \vec{I} = \frac{1}{\mu} \left[(\delta \vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \delta \vec{B} \right] = \frac{B_0^2}{\mu} \left[\frac{(\vec{\delta} \cdot \nabla) \vec{B}_0}{B_0} + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial s} (B_0 \vec{\delta}) \right].$$

Dans le premier terme nous écrivons $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_\parallel$ puis développons les dérivées des produits de fonctions pour trouver la tension magnétique :

$$\delta \vec{I} = \rho_0 V_A^2 \left[(\vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{K}}_b) \vec{e}_\parallel + (\vec{\delta} \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel + \frac{\partial \vec{\delta}}{\partial s} + \mathcal{K}_{b\parallel} \vec{\delta} \right]. \quad (\text{B.29})$$

Nous ne nous intéressons dans cette section qu'aux composantes suivant \vec{e}_l et \vec{e}_A de la tension c'est-à-dire à

$$\delta \vec{I}_\perp = \rho_0 V_A^2 \left\{ (\vec{\delta} \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel + \left[\frac{\partial \vec{\delta}}{\partial s} \right]_\perp + \mathcal{K}_{b\parallel} \vec{\delta}_\perp \right\}.$$

- Le premier vecteur : $(\vec{\delta} \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel$ est nul suivant \vec{e}_\parallel . On va simplement récrire ce terme en décomposant $\vec{\delta}$:

$$\begin{aligned} (\vec{\delta} \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel &= \delta_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + \delta_l (\vec{e}_l \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel + \delta_A (\vec{e}_A \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel \\ &= \delta_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + \sum_{\alpha=\{l,a\}} \delta_\alpha (\vec{e}_\alpha \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

- Par analogie avec le calcul de $\left[\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial s} \right]_\perp$ fait dans l'évaluation de la perturbation de champ magnétique perpendiculaire, nous déduisons directement la formule du second terme présent ci-dessus dans l'expression de $\delta \vec{I}_\perp$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \vec{\delta}}{\partial s} \right]_\perp &= \delta_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + \left(\frac{\partial \delta_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \delta_A}{\partial s} \vec{e}_A \right) + \left(\delta_l \frac{\partial \vec{e}_l}{\partial s} + \delta_A \frac{\partial \vec{e}_A}{\partial s} \right) + (\vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c) \vec{e}_\parallel \\ &= \delta_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + \frac{\partial \delta_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \delta_A}{\partial s} \vec{e}_A + \sum_{\alpha=\{l,a\}} \delta_\alpha (\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\alpha + (\vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c) \vec{e}_\parallel. \end{aligned}$$

Ainsi, au moyen des résultats intermédiaires (B.30) et (B.31) nous sommes en mesure d'exprimer la tension perpendiculaire créée par la perturbation de champ magnétique :

$$\begin{aligned} \delta \vec{I}_\perp = \rho_0 V_A^2 \left[\frac{\partial \delta_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \delta_A}{\partial s} \vec{e}_A + \sum_{\alpha=\{l,a\}} \delta_\alpha [(\vec{e}_\parallel \cdot \nabla) \vec{e}_\alpha + (\vec{e}_\alpha \cdot \nabla) \vec{e}_\parallel] \right. \\ \left. + 2 \delta_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + (\vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c) \vec{e}_\parallel + \mathcal{K}_{b\parallel} \vec{\delta}_\perp \right]. \end{aligned}$$

Or, nous retrouvons dans $\delta\vec{I}_\perp$, l'opérateur Γ^\dagger défini en (B.23), d'où :

$$\delta\vec{I}_\perp = \rho_o V_A^2 \left[\frac{\partial \delta l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \delta A}{\partial s} \vec{e}_A + \Gamma^\dagger \cdot \vec{\delta}_\perp + 2 \delta_{\parallel} \vec{\mathcal{K}}_c + \left(\vec{\delta} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c \right) \vec{e}_{\parallel} + \mathcal{K}_{b\parallel} \vec{\delta}_\perp \right], \quad (\text{B.31})$$

qui une fois décomposé sur $\{\vec{e}_l, \vec{e}_A\}$ donne :

$$\delta I_{\{l,A\}} = \rho_o V_A^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} \delta_{\{l,A\}} + \mathcal{K}_{b\parallel} \delta_{\{l,A\}} + \vec{e}_{\{l,A\}} \cdot \Gamma^\dagger \cdot \vec{\delta}_\perp + 2 \delta_{\parallel} \mathcal{K}_{c\{l,A\}} \right). \quad (\text{B.32})$$

B.2.6 La force de pression

Afin de compléter le calcul des différentes forces présentes dans les équations du mouvement nous sommes conduits à évaluer la force de pression. Cette force est produite par les variations spatiales de la pression totale, dont nous allons récrire l'expression (B.17) :

$$-\nabla \delta P_* = -\nabla \left(-\frac{\rho_o}{\gamma} C_S^2 \vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_p - \rho_o C_S^2 \nabla \cdot \vec{\xi} + \rho_o V_A^2 \delta_{\parallel} \right).$$

Puis nous remplaçons le champ magnétique parallèle par son expression calculée en (B.21) ainsi que $\vec{\mathcal{K}}_p$ par $\gamma \vec{\mathcal{K}}_\rho$:

$$-\nabla \delta P_* = \nabla \left\{ \underbrace{\rho_o C_S^2 \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_\rho + \nabla \cdot \vec{\xi} \right)}_{\text{origine thermique}} + \underbrace{\rho_o V_A^2 \left[\left(\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} + \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \vec{\xi}_\perp + \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right]}_{\text{origine magnétique}} \right\}, \quad (\text{B.33})$$

où les contributions thermique et magnétique se trouvent encore séparées. Dans la relation suivante, nous combinons ces différents termes, pour en définitive aboutir à :

$$\begin{aligned} -\nabla \delta P_* = \nabla \left\{ \rho_o V_A^2 \left[\left(\beta \vec{\mathcal{K}}_\rho + \vec{\mathcal{K}}_{b\perp} + \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \vec{\xi}_\perp \right. \right. \\ \left. \left. + \beta \left(\frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial s} - \mathcal{K}_{b\parallel} \xi_{\parallel} + \mathcal{K}_{\rho\parallel} \xi_{\parallel} \right) + (1 + \beta) \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right] \right\}, \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

en remplaçant la divergence de $\vec{\xi}_{\parallel}$ par son expression calculée précédemment en (B.20).

B.2.7 L'équation du mouvement parallèle

Les calculs effectués plus haut nous permettent, maintenant, de récrire l'équation du mouvement du plasma le long des lignes de champ en fonction du vecteur déplacement et des caractéristiques géométriques de la structure d'équilibre du plasma. À partir de l'équation de base (B.18) et des expressions de la force de Lorentz parallèle (B.28) et de la force de pression thermique extraite de (B.33), nous écrivons :

$$\frac{\partial^2 \xi_{\parallel}}{\partial t^2} = \mathcal{F}_{\parallel}(\vec{\xi}) + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_o C_S^2 \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_\rho + \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \right] + V_A^2 \left(\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} - \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \vec{\delta}_\perp.$$

Pour obtenir l'expression finale de l'équation du mouvement parallèle, nous remplaçons $\vec{\mathcal{B}}_\perp$ pour sa formule (B.24) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_\parallel}{\partial t^2} = & \mathcal{F}_\parallel(\vec{\xi}) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s} \left[\rho_0 C_S^2 \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_\rho + \nabla \cdot \vec{\xi} \right) \right] \\ & + V_A^2 \left(\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} - \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \left(\Gamma^- \cdot \vec{\xi}_\perp + \frac{\partial \xi_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \xi_A}{\partial s} \vec{e}_A \right). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

B.2.8 L'équation du mouvement perpendiculaire

De façon analogue au cas de l'équation du mouvement parallèle, à ce stade du développement, nous avons évalué tous les termes intervenant dans l'équation du mouvement du plasma perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. Remplaçons la force de pression totale (B.33) — équivalente à (B.34) — ainsi que la force de tension magnétique (B.31) dans l'équation du mouvement et ne considérons que ses composantes perpendiculaires. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\xi}_\perp}{\partial t^2} = & \vec{\mathcal{F}}_\perp(\vec{\xi}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla_\perp \left\{ \rho_0 C_S^2 \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{K}}_\rho + \nabla \cdot \vec{\xi} \right) + \rho_0 V_A^2 \left[\left(\vec{\mathcal{K}}_{b\perp} + \vec{\mathcal{K}}_c \right) \cdot \vec{\xi}_\perp + \nabla \cdot \vec{\xi}_\perp \right] \right\} \\ & + V_A^2 \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{B}_l}{\partial s} \vec{e}_l + \frac{\partial \mathcal{B}_A}{\partial s} \vec{e}_A \right) + \Gamma^+ \cdot \vec{\mathcal{B}}_\perp + 2 \mathcal{B}_\parallel \vec{\mathcal{K}}_c + \left(\vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{K}}_c \right) \vec{e}_\parallel + \mathcal{K}_{b\parallel} \vec{\mathcal{B}}_\perp \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

où, afin de ne pas surcharger la formulation finale, nous éviterons de remplacer les expressions des composantes du champ magnétique (B.21) et (B.24) dans celles de la tension magnétique.

Annexe C

Description des tenseurs Γ^\pm

Sommaire

C.1 Composantes diagonales	233
C.2 Composantes non-diagonales	234

Cette annexe propose une interprétation des tenseurs Γ^\pm , définis par la relation (B.23) comme :

$$\Gamma_{ij}^\pm = \vec{e}_i \cdot [(\vec{e}_j \cdot \nabla) \vec{e}_j \pm (\vec{e}_j \cdot \nabla) \vec{e}_j]; \quad (\text{C.1})$$

ils déterminent complèment la géométrie des lignes de champ d'une structure magnétique. Nous allons montrer que ces tenseurs traduisent simplement l'évasement et l'enroulement des lignes de champ magnétique.

C.1 Composantes diagonales

Comme le montre la figure C.1, les composantes diagonales des tenseurs Γ^\pm , données par :

$$\Gamma_{ii}^\pm = \pm \vec{e}_i \cdot [(\vec{e}_i \cdot \nabla) \vec{e}_i],$$

expriment simplement le changement d'orientation des lignes du champ magnétique, projeté sur \vec{e}_i , lorsque l'on se déplace suivant \vec{e}_j . Cela revient finalement à quantifier l'évasement ou

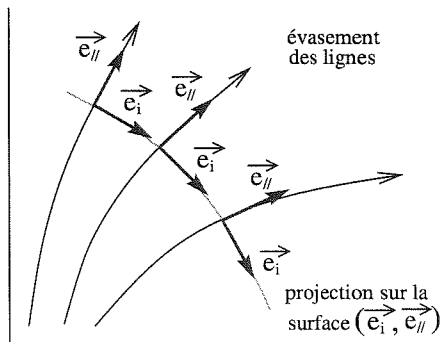


FIG. C.1 – On projette les lignes de champ magnétique sur la surface tangente à (\vec{e}_j, \vec{e}_i) , puis on regarde leur variation suivant \vec{e}_i , lorsque l'on se déplace dans cette même direction. On mesure ainsi l'évasement ou le resserrement des lignes de champ magnétique.

le resserrement des tubes de flux dans une direction ; on remarque que Γ_{ii}^+ est positif lorsque les lignes s'écartent et négatif lorsqu'elles se rapprochent, à l'inverse de Γ_{ii}^- .

C.2 Composantes non-diagonales

Les composantes non-diagonales des tenseurs Γ^\pm , ont des contributions de deux types.

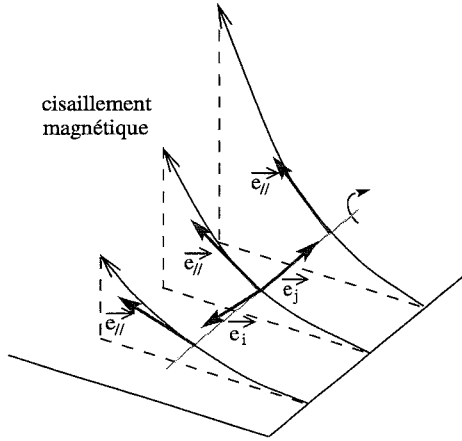


FIG. C.2 – Cette figure montre l'enroulement des lignes de champ magnétique — projetées dans le plan $(\vec{e}_j, \vec{e}_{||})$ — dans la direction transverse, \vec{e}_j . Dans Γ^\pm , de la déviation des lignes due aux variations de leur enroulement, on ne conserve que la projection suivant \vec{e}_j .

D'une part, nous devons considérer $\vec{e}_i \cdot [(\vec{e}_j \cdot \nabla) \vec{e}_j]$, qui montre simplement l'évolution de l'enroulement du champ magnétique, ou encore son cisaillement le long de la courbe définie par \vec{e}_j ; ce terme est négatif lorsque le cisaillement se fait dans le sens horaire et positif sinon.

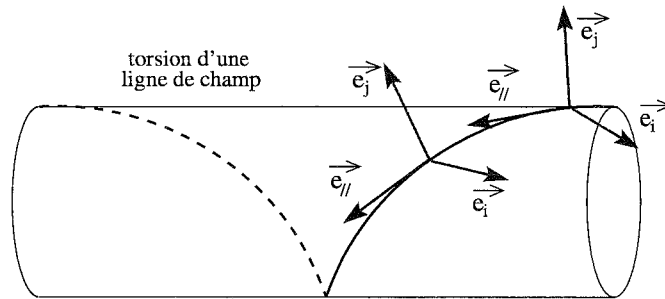


FIG. C.3 – Lorsque l'on déplace le trièdre $\{\vec{e}_{||}, \vec{e}_i, \vec{e}_j\}$ suivant une ligne de champ magnétique, la torsion de celle-ci induit une rotation de \vec{e}_j ; sa variation possède alors une composante suivant \vec{e}_i .

D'autre part, Γ^\pm fait également intervenir $\vec{e}_i \cdot [(\vec{e}_{||} \cdot \nabla) \vec{e}_j]$. Ce terme représente le dernier type de déformation que subit la structure magnétique après le cisaillement et les déformations de volume. Il s'agit de la torsion des lignes de champ magnétique, telle qu'on peut la voir sur la figure C.3.

Annexe D

Coefficients des équations de dispersion en géométrie cylindrique

Sommaire

D.1 Cas particulier \vec{e}_A et \vec{e}_r anti-parallèles	235
D.2 Cas général	237

Cette annexe donne les expressions des coefficients intervenant dans les équations de dispersion des modes ballooning (II-4.14) et (II-4.17) dans le cadre d'un équilibre cylindrique, axisymétrique et invariant suivant l'axe du cylindre.

D.1 Cas particulier \vec{e}_A et \vec{e}_r anti-parallèles

Suivant la figure II-6.1, les vecteurs de la base $\{\vec{e}_\parallel, \vec{e}_l, \vec{e}_A\}$ sont définis par :

$$\vec{e}_\parallel = \frac{1}{B_o} (B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z) = \cos \psi \vec{e}_\theta + \sin \psi \vec{e}_z, \quad (\text{D.1})$$

$$\vec{e}_l = \frac{1}{B_o} (B_z \vec{e}_\theta - B_\theta \vec{e}_z) = \sin \psi \vec{e}_\theta - \cos \psi \vec{e}_z, \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{e}_A = -\vec{e}_r, \quad (\text{D.3})$$

où ψ est l'angle de pitch.

D.1.1 Tenseurs géométriques

Dans cette section, nous allons calculer les composantes des tenseurs géométriques — c'est-à-dire liés uniquement au système de coordonnées dans lequel les calculs sont effectués — apparaissant dans les équations de dispersion découlant de l'ordering ballooning. Pour cela, définissons dans un premier temps :

$$\mathbf{C}_{ijk} = \vec{e}_i \cdot [(\vec{e}_j \cdot \nabla) \vec{e}_k], \quad (\text{D.4})$$

qui permet ensuite de construire les tenseurs Γ^\pm définis par (B.23). Ce tenseur possède certaines propriétés, en particulier lorsque les vecteurs $\vec{e}_{\{i,j,k\}}$ sont orthogonaux, $\mathbf{C}_{ijk} = -\mathbf{C}_{kji}$, de plus il vérifie toujours $\mathbf{C}_{iji} = 0$.

Dans le cadre d'approximation du ballooning, nous nous contentons d'évaluer les composantes Γ_{AA}^\pm et $(\Gamma^+\Gamma^-)_{AA}$; la première se développe simplement comme $\Gamma_{AA}^\pm = \mathbf{C}_{A//A} \pm \mathbf{C}_{AA//}$, où le premier terme est nul d'après la définition de \mathbf{C} ; quant au second, nous montrons qu'il est également nul car les dérivées de \vec{e}_\parallel sont tangentes aux surfaces magnétiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{AA//} &= \vec{e}_r \cdot \frac{d}{dr} \vec{e}_\parallel \\ &= \vec{e}_r \cdot (-\sin \psi \vec{e}_\theta + \cos \psi \vec{e}_z) \dot{\psi} = 0, \end{aligned}$$

où $\dot{\psi} = d\psi/dr$ est la dérivée radiale de l'angle de pitch. Soit finalement :

$$\Gamma_{AA}^\pm = 0. \quad (\text{D.5})$$

Compte tenu de la relation ci-dessus, la seconde composante tensorielle présente dans les équations de dispersion se décompose simplement comme :

$$\begin{aligned} (\Gamma^+\Gamma^-)_{AA} &= \Gamma_{A1}^+ \Gamma_{1A}^- \\ &= (\mathbf{C}_{A//1} + \mathbf{C}_{A1//}) (\mathbf{C}_{1//A} - \mathbf{C}_{1A//}) \\ &= \mathbf{C}_{A//1}^2 - \mathbf{C}_{A//1} \mathbf{C}_{1A//} - \mathbf{C}_{A1//} \mathbf{C}_{A//1} - \mathbf{C}_{A1//} \mathbf{C}_{1A//}. \end{aligned}$$

Nous devons donc évaluer trois composantes de \mathbf{C} à partir des définitions [D.1-D.3] des vecteurs de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{A//1} &= -\frac{\cos \psi}{r} \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \psi \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\sin \psi \cos \psi}{r} = \frac{B_{\theta z} B_{o\theta}}{r B_o^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1A//} &= (\sin \psi \vec{e}_\theta - \cos \psi \vec{e}_z) \cdot (\cos \psi \vec{e}_\theta + \sin \psi \vec{e}_z) \\ &= \dot{\psi} = \frac{B_{o\theta} B_{oz}}{B_o^2} \frac{d}{dr} \ln \left(\frac{B_{oz}}{B_{o\theta}} \right), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{A1//} &= -\frac{\sin \psi}{r} \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \psi \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\sin \psi \cos \psi}{r} = \frac{B_{oz} B_{o\theta}}{r B_o^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

où nous avons calculé $\dot{\psi}$ par :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{B_{oz}}{B_{o\theta}} \right) = \frac{d}{dr} \tan \psi = (1 + \tan^2 \psi) \dot{\psi} = \frac{B_o^2}{B_{o\theta}^2} \dot{\psi}.$$

En définitive, nous trouvons ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} &= -2 \frac{\sin \psi \cos \psi}{r} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{r} + \dot{\psi} \right) \\ &= -\frac{2}{r^2} \frac{B_{o\theta}^2 B_{oz}^2}{B_o^4} \left[1 + \frac{d}{d \ln r} \ln \left(\frac{B_{oz}}{B_{o\theta}} \right) \right], \end{aligned} \quad (D.9)$$

que nous pouvons récrire en fonction du pas de l'hélice h , défini par la relation (II-6.1) car on a la relation :

$$\dot{h} = 2\pi \left[\tan \psi + r (1 + \tan^2 \psi) \dot{\psi} \right] \implies S = \frac{d \ln h}{d \ln r} = 1 + \frac{r}{\sin \psi \cos \psi} \dot{\psi},$$

que l'on remplace dans (D.9) pour trouver :

$$\left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{AA} = -\frac{2}{r^2} \sin^2 \psi \cos^2 \psi \frac{d \ln h}{d \ln r}. \quad (D.10)$$

$S = d \ln h / d \ln r$ est un paramètre traduisant le cisaillement des lignes de champ, d'une surface magnétique à l'autre.

D.1.2 Échelles caractéristiques

Dans ce problème, compte tenu de l'invariance de l'équilibre le long des lignes de champ il est évident que toutes les échelles caractéristiques parallèles sont infinies, $\mathcal{K}_{\parallel} = 0$. Les seules échelles de longueurs qui interviennent dans les équations de dispersion sont celles traduisant la courbure ainsi que les variations du champ magnétique et de la pression (ou de la densité de masse) dans la direction du vecteur \vec{e}_A . En outre, ces grandeurs sont reliées entre elles par la relation déduite de l'équilibre dynamique ainsi que par l'équation d'état ; il nous suffit donc d'en déterminer deux pour toutes les caractériser :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{c_A} &= -\frac{\cos \psi}{r} \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\cos \psi \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\cos^2 \psi}{r} = \frac{B_{o\theta}^2}{r B_o^2}, \end{aligned} \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\rho_A} &= -\vec{e}_r \cdot \frac{\nabla \rho_o}{\rho_o} \\ &= -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} \ln P_o. \end{aligned} \quad (D.12)$$

D.2 Cas général

Ci-dessus, nous avons évalué les coefficients figurant dans les équations de dispersion en considérant \vec{e}_A et \vec{e}_r anti-parallèles afin d'être dans les conditions les plus favorables d'instabilité. Nous donnons ici brièvement la démarche à suivre pour calculer les composantes des tenseurs géométriques dans un cadre plus général.

Pour cela nous définissons deux opérateurs de rotation : \mathcal{R}_ψ et \mathcal{R}_φ , dont les axes sont respectivement \vec{e}_r et \vec{e}_\parallel , tels que :

$$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\} \xrightarrow{\mathcal{R}_\psi} \{\vec{e}_r, \vec{e}_\parallel, \vec{e}_t\} \xrightarrow{\mathcal{R}_\varphi} \{\vec{e}_A, \vec{e}_\parallel, \vec{e}_l\},$$

où φ et α sont deux angles d'Euler. Le cas traité précédemment correspond au cas $\varphi = \pi$. Les matrices de rotation permettant les changements de bases sont simplement :

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Le calcul des tenseurs géométriques nécessite en outre de connaître la matrice :

$$\Lambda = \mathcal{R}_\varphi \mathcal{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix},$$

puis sa dérivée radiale,

$$\dot{\Lambda} = \frac{d}{dr} \Lambda = \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \\ 0 & -\cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \end{bmatrix};$$

nous ne considérons pas ici le cadre le plus général où l'angle φ est une fonction du rayon.

L'étape suivante consiste à évaluer l'élément de base des tenseurs Γ^\pm , défini par la relation (D.4) ; nous le notons \mathbf{C}_{ijk} lorsqu'il s'exprime à partir des vecteurs de la base $\{\vec{e}_A, \vec{e}_\parallel, \vec{e}_l\}$ ou $\mathbf{C}_{i'j'k'}^*$ lorsqu'il s'agit de la base $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$. En toute généralité, \mathbf{C}_{ijk} se développe dans la base cylindrique comme :

$$\mathbf{C}_{ijk} = \underbrace{\Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \Lambda_k^{k'} \mathbf{C}_{i'j'k'}^*}_{(I)} + \underbrace{\Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \delta_{i'k'} \vec{e}_{j'}^* \cdot \nabla \Lambda_k^{k'}}_{(II)}.$$

Comme Λ dépend seulement de r , on a donc directement :

$$(II) = \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^r \delta_{i'k'} \frac{d}{dr} \Lambda_k^{k'}.$$

De plus, dans (I) toutes les composantes de $\mathbf{C}_{i'j'k'}^*$ sont nulles, mises à part celles faisant intervenir des termes en $d\vec{e}_r/d\theta$ ou $d\vec{e}_\theta/d\theta$, soit seulement :

$$\mathbf{C}_{\theta\theta r}^* = -\mathbf{C}_{r\theta\theta}^* = \frac{1}{r}.$$

Finalement, le tenseur recherché s'écrit comme :

$$\mathbf{C}_{ijk} = \frac{1}{r} \Lambda_i^\theta \Lambda_j^\theta \Lambda_k^r - \frac{1}{r} \Lambda_i^r \Lambda_j^\theta \Lambda_k^\theta + \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^r \delta_{i'k'} \frac{d}{dr} \Lambda_k^{k'}. \quad (D.13)$$

Après une manipulation de ces expressions à l'aide d'un outil de calcul formel, nous obtenons

$$\Gamma_{\mathbf{AA}}^{\pm} = \pm \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{\cos \psi \sin \psi}{r} + \dot{\psi} \right),$$

puis,

$$\left(\Gamma^+ \Gamma^- \right)_{\mathbf{AA}} = -2 \frac{\sin \psi \cos \psi}{r} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{r} + \dot{\psi} \right) \cos^2 \varphi.$$

Références Bibliographiques

Bibliographie

- Acheson, D. J. 1979, Instability by magnetic buoyancy, *Sol. Phys.* **62**, 23.
- Adams, F. C., Lada, C. J. et Shu, F. H. 1987, Spectral evolution of young stellar objects, *Astrophysical Journal* **312**, 788.
- Antonucci, R. 1993, Unified models for active galactic nuclei and quasars, *Annual Review of Astron and Astrophys* **31**, 473.
- Appl, S. 1996, Instabilities in transmagetosonic jets, *Astron. & Astrophys.* **314**, 995.
- Appl, S. et Camenzind, M. 1992, The stability of current-carrying jets, *Astron. & Astrophys.* **256**, 354.
- Appl, S., Lery, T. et Baty, H. 2000, Current-driven instabilities in astrophysical jets. Linear analysis, *Astron. & Astrophys.* **355**, 818.
- Arnold, C. N. et Arnett, W. D. 1986, Three-dimensional structure and dynamics of a supersonic jet, *Astrophysical Journal, Letters* **305**, L57.
- Bachiller, R. et Gomez-Gonzales, J. 1992, Bipolar molecular outflows, *Astronomy and Astrophysics Reviews* **3**, 257.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1991, "A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis., *Astrophysical Journal* **376**, 214.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1992, A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. IV-Nonaxisymmetric Perturbations, *Astrophysical Journal* **400**, 610.
- Balbus, S. A. et Hawley, J. F. 1998, Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Reviews of Modern Physics* **70**, 1, 1.
- Balescu, R. 1963, Monographs in statistical physics and thermodynamics, dans *Statistical mechanics of charged particles*, vol. 4, Interscience Publishers.
- Bateman, G. 1980, *MHD instabilities*, MIT Press.
- Begelman, M. C. 1998, Instability of Toroidal Magnetic Field in Jets and Plerions, *Astrophysical Journal* **493**, 291.
- Benford, G. 1978, Current-carrying beams in astrophysics - Models for double radio sources and jets, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **183**, 29.
- Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kruskal, M. D. et Kulsrud, R. M. 1958, An energy principle for hydromagnetic stability problems, *Proc. R. Soc. London* **244**, A, 17.
- Birkinshaw, M. 1990, *Beams and Jets in Astrophysics*, chap. The Stability of jets, pp. 270-341. Cambridge University Press, p.a. hugues édn.
- Blaes, O. M. et Balbus, S. A. 1994, Local shear instabilities in weakly ionized, weakly magnetized disks, *Astrophysical Journal* **421**, 163.
- Blandford, R. 1993, Acceleration and collimation mechanisms in jets, dans D. Burgarella, M. Livio et C. P. O'Dea (éditeurs), *Astrophysical jets*, Baltimore 1992, Cambridge University Press.
- Blandford, R. D. 1976, Accretion disc electrodynamics - A model for double radio sources, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **176**, 465.

- Blandford, R. D. et Payne, D. G. 1982, Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **199**, 883.
- Blandford, R. D. et Rees, M. J. 1974, A 'twin-exhaust' model for double radio sources, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **169**, 395.
- Bodo, G., Massaglia, S., Ferrari, A. et Trussoni, E. 1994, Kelvin-Helmholtz instability of hydrodynamic supersonic jets, *Astron. & Astrophys.* **283**, 655.
- Bodo, G., Massaglia, S., Rossi, P., Rosner, R. et al. 1995, The long-term evolution and mixing properties of high Mach number hydrodynamic jets., *Astron. & Astrophys.* **303**, 281+.
- Bodo, G., Rossi, P., Massaglia, S., Ferrari, A. et al. 1998, Three-dimensional simulations of jets, *Astron. & Astrophys.* **333**, 1117.
- Boyle, B. J., Fong, R., Shanks, T. et Peterson, B. A. 1987, The evolution of optically selected QSOs, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **227**, 717.
- Brandenburg, A., Nordlund, A., Stein, R. F. et Torkelsson, U. 1995, Dynamo-generated Turbulence and Large-Scale Magnetic Fields in a Keplerian Shear Flow, *Astrophysical Journal* **446**, 741+.
- Brio, M. et Wu, C. C. 1988, An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics* **75**, 400.
- Cabrit, S., Edwards, S., Strom, S. E. et Strom, K. M. 1990, Forbidden-line emission and infrared excesses in T Tauri stars - Evidence for accretion-driven mass loss?, *Astrophysical Journal* **354**, 687.
- Cameron, A. G. W. 1978, Physics of the primitive solar accretion disk, *Moon and Planets* **18**, 5.
- Casse, F. et Ferreira, J. 2000, Magnetized accretion-ejection structures. IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs, *Astron. & Astrophys.* **353**, 1115.
- Chan, K. L. et Henriksen, R. N. 1980, On the supersonic dynamics of magnetized jets of thermal gas in radio galaxies, *Astrophysical Journal* **241**, 534.
- Chandrasekhar, S. 1960, The stability of non-dissipative Couette flow in hydromagnetics, *Proc. Nat. Acad. Sci* **46**, 253.
- Chandrasekhar, S. 1961, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon, 1961.
- Clarke, D. A. 1988, *A search for the effects of active magnetic fields in extra-galactic radio sources*, Thèse de doctorat, New Mexico Univ., Albuquerque.
- Clarke, D. A., Burns, J. O. et Norman, M. L. 1989, Numerical observations of a simulated jet with a passive helical magnetic field, *Astrophysical Journal* **342**, 700.
- Clarke, D. A., Norman, M. L. et Burns, J. O. 1986, Numerical simulations of a magnetically confined jet, *Astrophysical Journal, Letters* **311**, L63.
- Colella, P. et Woodward, P. 1984, The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas dynamical simulations, *Journal of Computational Physics* **54**, 174.
- Coppi, B., Filreis, J. et Pedrogaro, F. 1979, Analytical representation and physics of ballooning modes, *Annals of Physics* **121**, 1.
- Corcoran, M. et Ray, T. P. 1998, Spectroscopic discovery of a bipolar jet from the Herbig Ae/Be star LkHalpha 233, *Astron. & Astrophys.* **336**, 535.
- Cowling, T. G. 1976, Monographs on astronomical subjects, dans *Magnetohydrodynamics*, Adam Hilger.
- De Campli, W. M. 1981, T Tauri winds, *Astrophysical Journal* **244**, 124.
- Dewar, R. L. et Glasser, A. H. 1983, Ballooning mode spectrum in general toroidal systems, *Physics of Fluids* **26**, 3038.
- Evans, C. R. et Hawley, J. F. 1988, Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method, *Astrophysical Journal* **332**, 659.
- Fanaroff, B. L. et Riley, J. M. 1974, The morphology of extragalactic radio sources of high and low luminosity, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **167**, 31P.

- Ferreira, J. 1997, Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs., *Astron. & Astrophys.* **319**, 340.
- Ferreira, J. et Pelletier, G. 1995, Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows., *Astron. & Astrophys.* **295**, 807+.
- Ferreira, J., Pelletier, G. et Appl, S. 2000, Reconnection X-winds: spin-down of low-mass protostars, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **312**, 387.
- Ferrière, K. M., Zimmer, C. et Blanc, M. 1999, Magnetohydrodynamic waves and gravitational/centrifugal instability in rotating systems, *J. Geophys. Res.* **104**, A8, 17 335.
- Frank, A., Jones, T. W., Ryu, D. et Gaalaas, J. B. 1996, The Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz Instability : A Two-dimensional Numerical Study, *Astrophysical Journal* **460**, 777+.
- Frank, J., King, A. et Raine, D. 1992, *Accretion power in astrophysics*, Cambridge University Press.
- Freidberg, J. P. 1987, *Ideal magnetohydrodynamics*, Plenum Press.
- Furth, H. P., Killeen, J., Rosenbluth, M. N. et Coppi, B. 1965, Stabilization by Shear and Negative V, dans *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, vol. 1, pp. 103-125, Vienna, IAEA.
- Galsgaard, K. 1995, *The challenge of non-ideal MHD and investigations of the coronal heating problem*, Thèse de doctorat, Niels Bohr Institute for Astronomy, Physics and Geophysics, Copenhagen, Denmark.
- Goedbloed, J. P. et Sakanaka, P. H. 1974, , *Physics of Fluids* **17**, 908.
- Goldreich, P. et Lynden-Bell, D. 1965, II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **130**, 125+.
- Hardee, P. E. et Clarke, D. A. 1992, Nonlinear dynamics of a three-dimensional jet, *Astrophysical Journal, Letters* **400**, L9.
- Hardee, P. E. et Clarke, D. A. 1995a, Destabilization of Strongly Magnetized Jets, *Astrophysical Journal* **449**, 119+.
- Hardee, P. E. et Clarke, D. A. 1995b, Emission and Dynamics of a Heavy Three-dimensional Magnetized Jet, *Astrophysical Journal, Letters* **451**, L25.
- Hardee, P. E., Clarke, D. A. et Howell, D. A. 1995, The stability and collimation of three-dimensional jets, *Astrophysical Journal* **441**, 644.
- Hardee, P. E. et Rosen, A. 1999, On the Dynamics and Structure of Three-dimensional Trans-Alfvénic Jets, *Astrophysical Journal* **524**, 650.
- Hardie, I. S., Hood, A. W. et Allen, H. R. 1991, Resistive ballooning line-tied boundary conditions, *Sol. Phys.* pp. 313-338.
- Hartigan, P., Edwards, S. et Ghandour, L. 1995, Disk Accretion and Mass Loss from Young Stars, *Astrophysical Journal* **452**, 736+.
- Hawley, J. F. et Balbus, S. A. 1991, A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. II. Nonlinear Evolution, *Astrophysical Journal* **376**, 223.
- Hawley, J. F. et Balbus, S. A. 1992, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. III - Long-term evolution in a shearing sheet, *Astrophysical Journal* **400**, 595.
- Hawley, J. F., Balbus, S. A. et Winters, W. F. 1999, Local Hydrodynamic Stability of Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **518**, 394.
- Hawley, J. F., Gammie, C. F. et Balbus, S. A. 1995, Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **440**, 742+.
- Hawley, J. F., Gammie, C. F. et Balbus, S. A. 1996, Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo, *Astrophysical Journal* **464**, 690+.
- Hawley, J. F. et Stone, James, M. 1995, MOCCT: A numerical technique for astrophysical MHD, *Computer Physics Communications* **89**, 127.
- Hawley, J. F., Wilson, J. R. et Smarr, L. L. 1984, A numerical study of nonspherical black hole accretion. I - Equations and test problems, *Astrophysical Journal* **277**, 296.

- Heathcote, S., Morse, J. A., Hartigan, P., Reipurth, B. *et al.* 1996, Hubble Space Telescope Observations of the HH 47 Jet: Narrowband Images, *Astronomical Journal* **112**, 1141+.
- Henri, G. et Pelletier, G. 1991, Relativistic electron-positron beam formation in the framework of the two-flow model for active galactic nuclei, *Astrophysical Journal, Letters* **383**, L7.
- Hirsch, C. 1997a, Numerical computation of external and internal flows, dans *Fundamentals of numerical discretization*, vol. 1, Wiley-Interscience.
- Hirsch, C. 1997b, Numerical computation of external and internal flows, dans *Computational methods for inviscid and viscous flows*, vol. 2, Wiley-Interscience.
- Hyman, J. M. 1979, A method of lines approach to the numerical solution of conservation laws, dans R. Vichnevetsky et R. S. Stepleman (éditeurs), *Advances in computer methods for partial differential equations III*, pp. 313–221, New Brunswick, New Jersey, Department of Computer Science, Rutgers University, Publ. IMACS.
- Jackson, J. D. 1975, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons.
- Kadomtsev, B. B. 1963, *Problems of plasma theory*, chap. Hydromagnetic stability of plasma, p. 132, Leontovich, M. A.
- Kadomtsev, B. B. 1966, *Reviews of plasma physics*, vol. 2, chap. Hydromagnetic stability of a plasma, p. 153, Leontovich, M. A.
- Kormendy, J. et Richstone, D. 1995, Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei, *Annual Review of Astron and Astrophys* **33**, 581+.
- Landau, L. et Lifchitz, E. 1971, Physique théorique, dans *Mécanique des fluides*, vol. 6, Librairie du globe, mir édn.
- Larson, R. B. 1973, Processes in Collapsing Interstellar Clouds, *Annual Review of Astron and Astrophys* **11**, 219+.
- Laval, G., Mercier, C. et Pellat, R. M. 1965, Necessity of the Energy Principles for magnetostatics stability, *Nuclear Fusion* **5**, 156.
- Lery, T., Baty, H. et Appl, S. 2000, Current-driven instabilities in astrophysical jets. Non linear development, *Astron. & Astrophys.* **355**, 1201.
- Lin, D. N. C. et Papaloizou, J. 1980, On the structure and evolution of the primordial solar nebula, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **191**, 37.
- Lind, K. R., Payne, D. G., Meier, D. L. et Blandford, R. D. 1989, Numerical simulations of magnetized jets, *Astrophysical Journal* **344**, 89.
- Liu, W. W. 1997, Physics of the explosive growth phase: ballooning instability revisited, *J. Geophys. Res.* **102**, A3, 4 927.
- Lovelace, R. V. E. 1976, Dynamo model of double radio sources, *Nature* **262**, 649.
- Lynden-Bell, D. 1969, Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars, *Nature* **223**, 690+.
- Lynden-Bell, D. et Pringle, J. E. 1974, The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables., *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **168**, 603.
- Miura, A. 1984, Anomalous transport by magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in the solar wind-magnetosphere interaction, *J. Geophys. Res.* **89**, 801.
- Miura, A., Ohtani, S. et Tamao, T. 1989, Ballooning instability and structure of diamagnetic hydromagnetic waves in a model magnetosphere, *J. Geophys. Res.* **94**, A11, 15 231.
- Moffatt, H. K. 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press.
- Narayan, R. et Yi, I. 1995a, Advection-dominated accretion: Self-similarity and bipolar outflows, *Astrophysical Journal* **444**, 231.
- Narayan, R. et Yi, I. 1995b, Advection-dominated Accretion: Underfed Black Holes and Neutron Stars, *Astrophysical Journal* **452**, 710+.
- Newcomb, William, A. 1961, Convective instability by gravity in a plasma with a frozen-in magnetic field, *Physics of Fluids* **4**, 4, 391.

- Nicholson, D. R. 1983, *Introduction to plasma theory*, Wiley series in plasma physics.
- Norman, M. L., Smarr, L., Smith, M. D. et Wilson, J. R. 1981, Hydrodynamic formation of twin-exhaust jets, *Astrophysical Journal* **247**, 52.
- Norman, M. L., Winkler, K. H. A., Smarr, L. et Smith, M. D. 1982, Structure and dynamics of supersonic jets, *Astron. & Astrophys.* **113**, 285.
- Osterbrock, D. E. 1993, The nature and structure of active galactic nuclei, *Astrophysical Journal* **404**, 551.
- Ouyed, R. et Pudritz, R. E. 1997a, Numerical Simulations of Astrophysical Jets from Keplerian Disks. I. Stationary Models, *Astrophysical Journal* **482**, 712+.
- Ouyed, R. et Pudritz, R. E. 1997b, Numerical Simulations of Astrophysical Jets from Keplerian Disks. II. Episodic Outflows, *Astrophysical Journal* **484**, 794+.
- Parker, E. N. 1966, The Dynamical State of the Interstellar Gas and Field, *Astrophysical Journal* **145**, 811.
- Pelletier, G. et Pudritz, R. E. 1992, Hydromagnetic disk winds in young stellar objects and active galactic nuclei, *Astrophysical Journal* **394**, 117.
- Perlman, E. S., Biretta, J. A., Zhou, F., Sparks, W. B. et al. 1999, Optical and Radio Polarimetry of the M87 Jet at 0.2" Resolution, *Astronomical Journal* **117**, 2185.
- Potash, R. I. et Wardle, J. F. C. 1980, 4C 32.69 - A quasar with a radio jet, *Astrophysical Journal* **239**, 42.
- Priest, E. R. 1984, *Solar magneto-hydrodynamics*, Geophysics and Astrophysics Monographs, Dordrecht: Reidel, 1984.
- Pringle, J. E. 1981, Accretion discs in astrophysics, *Annual Review of Astron and Astrophys* **19**, 137.
- Rees, M. J. 1967, Studies in radio source structure-I. A relativistically expanding model for variable quasi-stellar radio sources, *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.* **135**, 345+.
- Rosen, A., Hardee, P. E., Clarke, D. A. et Johnson, A. 1999, Effects of Magnetic Fields on Mass Entrainment of Supermagnetosonic Jets, *Astrophysical Journal* **510**, 136.
- Ryu, D., Miniati, F., Jones, T. W. et Frank, A. 1998, A Divergence-free Upwind Code for Multidimensional Magnetohydrodynamic Flows, *Astrophysical Journal* **509**, 244.
- Salpeter, E. E. 1964, Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects., *Astrophysical Journal* **140**, 796+.
- Sauty, C., Tsinganos, K. et Trussoni, E. 1999, Nonradial and nonpolytropic astrophysical outflows. IV. Magnetic or thermal collimation of winds into jets?, *Astron. & Astrophys.* **348**, 327.
- Shakura, N. I. et Sunyaev, R. A. 1973, Black holes in binary systems. Observational appearance., *Astron. & Astrophys.* **24**, 337.
- Shapiro, S. L., Lightman, A. P. et Eardley, D. M. 1976, A two-temperature accretion disk model for Cygnus X-1 - Structure and spectrum, *Astrophysical Journal* **204**, 187.
- Shibata, K. et Uchida, Y. 1986, A magnetodynamic mechanism for the formation of astrophysical jets. II. Dynamical processes in the accretion of magnetized mass in rotation, *Publications of the ASJ* **38**, 631.
- Shu, F., Najita, J., Ostriker, E., Wilkin, F. et al. 1994, Magnetocentrifugally driven flows from young stars and disks. I. A generalized model, *Astrophysical Journal* **429**, 781.
- Sod, G. A. 1978, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics* **27**, 1.
- Spies, G. O. 1974, Stability criteria and the maximum growth rate in magnetohydrodynamics, *Physics of Fluids* **17**, 2019.
- Stone, J. M. et Balbus, S. A. 1996, Angular Momentum Transport in Accretion Disks via Convection, *Astrophysical Journal* **464**, 364+.
- Stone, J. M., Hawley, J. F., Evans, C. R. et Norman, M. L. 1992, A test suite for magnetohydrodynamical simulations, *Astrophysical Journal* **388**, 415.
- Stone, J. M., Hawley, J. F., Gammie, C. F. et Balbus, S. A. 1996, Three-dimensional Magnetohydrodynamical Simulations of Vertically Stratified Accretion Disks, *Astrophysical Journal* **463**, 656+.

- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1992a, ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests, *Astrophysical Journal, Supplement* **80**, 753.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1992b, ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II - The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests, *Astrophysical Journal, Supplement* **80**, 791+.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1993a, Numerical simulations of protostellar jets with nonequilibrium cooling. I. Method and two-dimensional results, *Astrophysical Journal* **413**, 198+.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1993b, Numerical simulations of protostellar jets with nonequilibrium cooling. II. Models of pulsed jets, *Astrophysical Journal* **413**, 210+.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1994a, Numerical simulations of magnetic accretion disks, *Astrophysical Journal* **433**, 746.
- Stone, J. M. et Norman, M. L. 1994b, Numerical simulations of protostellar jets with nonequilibrium cooling. III. Three-dimensional results, *Astrophysical Journal* **420**, 237.
- Strom, K. M., Strom, S. E., Wenz, M., Wolff, S. C. *et al.* 1986, Optical manifestations of mass outflows from young stars - An atlas of CCD images of Herbig-Haro objects, *Astrophysical Journal, Supplement* **62**, 39.
- Suydam, B. R. 1958, Stability of a linear pinch, dans *Proceedings of the United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, vol. 31, p. 157, Geneva, United Nations.
- Terebey, S., Shu, F. H. et Cassen, P. 1984, The collapse of the cores of slowly rotating isothermal clouds, *Astrophysical Journal* **286**, 529.
- Tscharnutter, W. et Winkler, K. H. 1979, A method for computing selfgravitating gas flows with radiation, *Computer Physics Communications* **18**, 171.
- Uchida, Y. et Shibata, K. 1985, Magnetodynamical acceleration of CO and optical bipolar flows from the region of star formation, *Publications of the ASJ* **37**, 515.
- Urry, C. M. et Padovani, P. 1995, Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei, *Public. of the Astron. Soc. Pac.* **107**, 803+.
- Velikhov, E. P. 1959, Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field, *Soviet. Phys. JETP* **36**, 1398.
- Von Neumann, J. et Richtmyer, R. D. 1950, A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks, *Journal of Applied Physics* **21**, 232.

Résumé

La première partie de ce travail se propose de définir une nouvelle version du formalisme d'étude des instabilités MHD de pression dans les structures d'accrétion-éjection magnétisées. Ces processus se produisent dans des plasmas confinés magnétiquement et sont très contraignants dans le domaine de la fusion thermonucléaire mais leur influence est peu étudiée dans des contextes astrophysiques. Dans un cadre d'approximation éliminant les ondes magnétosoniques rapides nous avons développé un système d'équations général permettant de s'intéresser à la fois aux modes instables d'interchange et aux modes de ballooning. L'application de ce système à un jet cylindrique en rotation solide nous montre que le cisaillement magnétique conduit à la déstabilisation des parties internes de ces structures. En outre, tout en clarifiant cette problématique dans une certaine mesure, nous retrouvons que ces flots sont génériquement instables vis-à-vis des modes d'interchange.

Par ailleurs, nous avons étudié les méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles et plus particulièrement celles de la MHD. À partir d'un algorithme d'intégration élémentaire, nous avons pu évaluer les effets de géométrie, de conditions aux limites et de dissipation artificielle sur le calcul numérique, à travers une série de tests classiques.

L'étude de la production de rayons cosmiques de très haute énergie dans les gamma-ray bursts constitue la dernière partie du travail effectué. Dans ces objets, des processus de Fermi accélèrent des particules jusqu'à des énergies de 10^{21} eV, lors du croisement de perturbations d'Alfvén relativistes. Une interaction de type faisceau-plasma, entre une coquille de plasma en mouvement relativiste et les baryons qui la traversent, génère ces fronts alfvéniques et un mécanisme de rétrodiffusion redistribue l'énergie disponible entre des perturbations alfvéniques progressive, régressive et des perturbations magnétosoniques.

Summary

The first part of this work proposes a new version of the mathematical formalism used to describe pressure-driven instabilities in magnetized accretion-ejection structures. Such processes, occurring in magnetically confined plasmas, pose very stringent limits to thermonuclear fusion devices but their influence in astrophysical objects has rarely been considered. In a framework which eliminates fast magnetosonic waves one develops a system of equations allowing us to follow both ballooning and interchange modes. An application of this result to a cylindrical jet being subject to solid rotation shows that the inner parts of such structures are destabilized by magnetic shear. Furthermore, while clarifying somewhat previous studies, one finds that jets confined by a dominant toroidal magnetic field are generically unstable with respect to interchange modes.

Moreover, one has written a numerical code to solve the MHD partial differential equations. Starting with a basic algorithm, one has assessed the effects of the geometry, boundary conditions and artificial dissipation on numerical computation. The code has been tested by solving classical hydrodynamic and MHD Riemann problems.

A new mechanism of ultra high energy cosmic ray production in gamma-ray bursts composes the last part of this work. In these objects, particles are accelerated up to energies of the order of 10^{21} eV, by means of relativistic Alfvén perturbations crossings. A stream instability involving a highly relativistic shell of plasma, the fireball, and baryons going through it produces such Alfvén fronts. Then, Brillouin-like backscattering processes redistribute the available energy between the forward and backward Alfvén waves and the magnetosonic ones.